

Московский государственный текстильный университет
им. А. Н. Косыгина

На правах рукописи

Моисеенко Евгений Викторович

ВОЛНЫ МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА В СРЕДАХ
С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ ПЛАЗМЕННОГО ТИПА
И НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

01.04.05 – оптика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
профессор Шепелев А. В.

Москва – 2004 г.

Содержание

Введение.....	4
Глава 1. Нелинейная восприимчивость полупроводников в миллиметровом и субмиллиметровом диапазоне.....	8
1.1 Введение.....	8
1.2 Факторы, определяющие оптические свойства полупроводников в миллиметровом и субмиллиметровом диапазоне.....	11
1.3 К точному решению задачи.....	14
1.4 Времена релаксации энергии и импульса.....	16
1.5 Оценка температуры носителей.....	18
1.6 Характеристика основных процессов рассеяния.....	20
1.6.1 Рассеяние на ионизированных примесях.....	20
1.6.2 Рассеяние на акустических фононах.....	22
1.6.3 Рассеяние на неполярных оптических фононах.....	24
1.6.4 Рассеяние на полярных оптических фононах.....	25
1.7 Важнейшие механизмы рассеяния для полупроводников типа АШВV.....	27
1.7.1 Общие результаты.....	27
1.7.2 Арсенид галлия.....	28
1.7.3 Арсенид индия.....	31
1.7.4 Фосфид индия.....	31
1.8 Значения $\chi^{(3)}$ для различных полупроводников типа АШВV.....	37
1.8.1 Введение.....	37
1.8.2 Общие результаты.....	38
1.8.3 Арсенид галлия.....	44
1.8.4 Арсенид индия.....	44
1.8.5 Фосфид индия.....	51
1.9 Генерация третьей гармоники при отражении излучения от поверхности полупроводника.....	55

1.10 Основные результаты главы 1.....	57
Глава 2. Временное представление взаимодействия коротких несинусоидальных импульсов с плазмоподобной средой.....	58
2.1 Отражение и преломление коротких импульсов на границе плазмоподобной среды (решение во временной области).....	58
2.2 Традиционные методы решения задачи.....	61
2.3 Метод неразделяющихся решений.....	63
2.4 Численный метод.....	69
2.5 Отраженный и проходящий импульсы при различных значениях параметра α	71
2.6 Основные результаты главы 2.....	85
Глава 3. Отражение и пропускание волн тонкими неоднородными пленками (точно решаемая модель).....	86
3.1 Введение.....	86
3.2 Базовые уравнения для s- и p-поляризованной волны.....	88
3.3 Выражения для поляризационных компонент электромагнитного поля внутри неоднородного диэлектрика.....	91
3.4 Поляризационная зависимость коэффициентов отражения.....	96
3.5 Оптимизация параметров слабоотражающих покрытий.....	99
3.6 Основные результаты главы 3.....	104
Глава 4. Математические методы оптики неоднородных сред в задачах квантовой механики.....	105
4.1 Введение.....	105
4.2 Собственные функции уравнения Шредингера для «расщепленного» потенциала.....	108
4.3 Уровни энергии частицы в «расщепленной» потенциальной яме...	115
4.4 Основные результаты главы 4.....	122
Заключение.....	123
Список литературы.....	125

Введение

Диссертационная работа посвящена теоретическому изучению эффектов, возникающих при взаимодействии излучения длинноволнового диапазона с веществом. Эти эффекты могут быть обусловлены как пространственной или временной неоднородностью самой среды, так и особенностями внешнего электромагнитного поля, в частности, его высокой напряженностью или малой продолжительностью импульса.

Нелинейная зависимость диэлектрической проницаемости вещества от напряженности внешнего поля впервые была описана и определена экспериментально несколько десятилетий назад [1 – 4], когда изобретение лазера позволило получить когерентное излучение высокой мощности. За это время были хорошо изучены нелинейные свойства материалов в оптическом и ближнем инфракрасном диапазоне, продвижение же в дальний инфракрасный диапазон оказалось сопряжено с существенными техническими трудностями [5, 6]. Вплоть до недавнего времени не существовало перестраиваемых источников излучения длинноволнового диапазона, достаточно мощных для того, чтобы стало возможным наблюдение и использование в нем нелинейнооптических свойств веществ. Что касается проводившихся ранее теоретических исследований, то они были затруднены вследствие недостатка экспериментальных данных. Между тем, было экспериментально обнаружено и исследовано влияние электромагнитного поля на оптические свойства полупроводников в миллиметровом диапазоне и намечен подход к вычислению в нем их нелинейных восприимчивостей [7 – 11]. Появление в последнее время лазеров на свободных электронах [12] и других методов генерации мощного длинноволнового излучения делает возможным практическое изучение нелинейных свойств материалов в рассматриваемом диапазоне. Имеющиеся экспериментальные данные [13, 14] и результаты, полученные в настоящей работе, позволяют предположить в нем более высокие абсолютные значения нелинейных восприимчивостей, нежели в

оптическом и ближнем инфракрасном диапазонах, то есть потенциально возникает возможность эффективного применения методов, требующих ярко выраженных нелинейных свойств веществ, в частности, нелинейной спектроскопии.

Кроме реализации таких возможностей, как высокая мощность и широкий частотный диапазон излучения, современные источники электромагнитных волн позволяют варьировать длительность импульса от традиционных длинных квазимонохроматических импульсов до коротких видеоимпульсов [15 – 19]. При взаимодействии коротких импульсов с плазмоподобными средами, когда продолжительность импульса сравнима с плазменной частотой среды, свойства последней успевают существенно измениться за время взаимодействия, что в некоторых случаях приводит к сильному искажению фронта как отраженного, так и проникшего вглубь среды импульса. При этом применение традиционных методов расчета этих импульсов, основанных на преобразовании Фурье, то есть на представлении импульса в виде набора бегущих гармонических волн, оказывается неэффективным или невозможным [20]. Проблемы, связанные с особенностями такого представления импульса, можно решить использованием временного подхода, развитого в настоящей работе, основанного на рассмотрении неразделяющихся решений волнового уравнения [21].

Наряду с временной неоднородностью среды, связанной с малой продолжительностью импульса, ее пространственная неоднородность также оказывает заметное влияние на отражение и прохождение электромагнитного излучения. Современные математические методы [22 – 26] и технологии позволяют рассчитывать и наносить тонкие диэлектрические покрытия с достаточно сложной координатной зависимостью профиля диэлектрической проницаемости, которые могут существенным образом влиять на отражательные свойства среды. Применение таких покрытий позволяет при

значительно меньшей их толщине по сравнению с однородными аналогами добиться большего (или, при необходимости, меньшего) пропускания излучения в более широком частотном диапазоне. Кроме того, возможно использование таких покрытий для получения поляризационных фильтров. Тем не менее, вплоть до недавнего времени было найдено точное решение, описывающее отражательные свойства таких сред, лишь для нескольких профилей диэлектрической проницаемости с одним свободным параметром [27 – 30]. Для более сложных случаев применяются численные методы, основанные на приближении неоднородного слоя набором однородных слоев. Предлагаемый в работе профиль с двумя свободными параметрами позволяет точно описывать широкий спектр покрытий, как с монотонным, так и немонотонным профилем диэлектрической проницаемости.

Таким образом, *задачей настоящей диссертационной работы* является теоретическое изучение некоторых эффектов, могущих возникнуть при взаимодействии электромагнитного излучения миллиметрового и субмиллиметрового диапазона, генерируемого современными источниками, с плазменными и неоднородными средами.

Диссертация состоит из четырех глав. В *первой главе* предлагается метод расчета нелинейных восприимчивостей полупроводников в длинноволновом диапазоне и демонстрируются результаты для ряда полупроводников типа АШВУ. Этот метод применим и к полупроводникам других типов, но именно для полупроводников типа АШВУ имеется наиболее полная и достоверная информация о характеристиках в рассматриваемом диапазоне.

Во *второй главе* предлагаются основанные на временном подходе методы расчета отраженного и прошедшего внутрь плазмopodobной среды импульсов для короткого несинусоидального исходного импульса. В качестве иллюстрации рассматриваются результаты, полученные для ряда соотношений продолжительности импульса и плазменной частоты среды.

В *третьей главе* получено аналитическое решение задачи об отражении электромагнитного излучения для нового координатного профиля диэлектрической проницаемости среды. Предлагаемый профиль позволяет реализовать малые значения коэффициентов отражения для произвольно поляризованных электромагнитных волн, падающих под произвольным углом.

Четвертая глава демонстрирует развитие метода, предложенного в третьей главе для описания отражения волны от неоднородного покрытия, в квантовомеханической задаче о нахождении энергетических уровней частицы в «расщепленном» потенциале.

В *заключении* сформулированы основные выводы и результаты работы.

Научная новизна работы состоит в том, что:

- выработан новый эффективный подход к вычислению нелинейных восприимчивостей полупроводников в миллиметровом диапазоне. Получены зависимости нелинейных восприимчивостей от температуры кристалла, длины волны и концентрации ионизированных примесей;

- изучены эффекты, возникающие при взаимодействии коротких несинусоидальных электромагнитных импульсов с плазменными средами, и разработаны методы расчета поля отраженной и прошедшей внутрь среды волн;

- предложен новый координатный профиль диэлектрической проницаемости, допускающий точное аналитическое рассмотрение взаимодействия поля электромагнитной волны с неоднородным покрытием

- предложен метод решения задачи нахождения энергетических уровней частицы в потенциальной яме с «расщепленным» потенциалом.

Глава 1

Нелинейная восприимчивость полупроводников в миллиметровом и субмиллиметровом диапазоне

1.1 Введение

Активное развитие нелинейной оптики, начавшееся в 1960-х годах с изобретением лазера, заложило основу для целого ряда как новых научных направлений, так и методов исследования вещества, основанных на эффектах, возникающих при взаимодействии с ним мощного электромагнитного излучения. Среди последних можно отметить, например, нелинейную спектроскопию, для которой ключевую роль играют вещества с ярко выраженными нелинейными свойствами. Однако столь бурное развитие было характерно лишь для оптического и ближнего инфракрасного диапазона. Проблема с изучением среднего и дальнего инфракрасного диапазона заключалась в том, что для получения заметного нелинейного отклика среды требуются источники мощного излучения, в то время как первые лазеры, действовавшие в этом диапазоне, развивали мощность лишь порядка 0.1 Вт. Первый мощный источник излучения в дальнем инфракрасном диапазоне появился в 1973 году [31], и за короткое время мощность таких источников была доведена до 1 МВт.

Вплоть до недавнего времени нелинейнооптические эффекты, связанные с взаимодействием излучения дальнего инфракрасного и микроволнового диапазона с веществом, практически не изучались, поскольку кроме высокой мощности при этом требуется еще и перекрытие широкого частотного диапазона. Существовавшие же до середины 1990-х годов источники мощного когерентного инфракрасного излучения, такие как CO₂-лазеры, работали на весьма ограниченном наборе частот. За период с 1970-х годов был получен ряд результатов в этой области, но вследствие ограниченных технических возможностей они относились к достаточно узким и далеко отстоящим друг от

друга частотным диапазонам [5, 6, 32]. В целом же взаимодействие мощного излучения частотой около 1 ТГц с веществом и, в частности, с полупроводниками до сих пор изучено достаточно мало [13]. В настоящее время в связи с появлением перестраиваемых источников интенсивного излучения [33 – 36], в частности, мощных лазеров на свободных электронах [12], появляется возможность изучения широкополосных нелинейно-оптических свойств веществ в миллиметровом и субмиллиметровом диапазоне. Взаимодействие поля этого диапазона с теплыми носителями в полупроводнике вызывает нелинейный отклик [37 – 39], который может наблюдаться экспериментально. Такой отклик проявляется, в частности, в изменении вольт-амперных характеристик образца в зависимости от мощности падающего излучения Раман-лазера [40] и генерации гармоник [5].

Как будет показано ниже, и это подтверждается имеющимися экспериментальными данными [13, 14], нелинейная восприимчивость некоторых полупроводников в рассматриваемом диапазоне на несколько порядков превышает нелинейную восприимчивость нелинейных материалов оптического диапазона. Это делает возможным наблюдение и использование в дальнем инфракрасном и микроволновом диапазоне таких эффектов, как генерация третьей гармоники, эффекты самовоздействия типа самофокусировки и самодефокусировки, рассеяние волны на нелинейной сверхрешетке, созданной интерференцией двух других волн той же или близкой частоты, а, возможно, и эффектов, связанных с нелинейностями более высокого порядка, даже при сравнительно невысокой мощности излучения.

Другой интересной особенностью дальнего инфракрасного излучения является тот факт, что, находясь между радио- и оптическим диапазоном, оно обладает свойствами, присущими им обоим, то есть может распространяться либо как оптическое в виде луча, либо наподобие электрического сигнала в проводнике. Это позволяет расширить сферу применения такого излучения путем выбора наиболее подходящей среды распространения. Так, используя

тонкий проводник, сечение которого существенно меньше, чем длина волны, можно точно подобрать фазу волны, что важно, в частности, в экспериментах по генерации излучения на суммарных или разностных частотах.

Целью настоящего исследования является выработка подхода к вычислению нелинейной восприимчивости полупроводников при взаимодействии с излучением частотой порядка 0.1 – 1 ТГц и ее расчет для конкретных полупроводников. На примере ряда полупроводников типа АШВУ анализируются основные факторы и механизмы, определяющие их нелинейные свойства в этом диапазоне и рассматриваются результаты расчета восприимчивостей.

1.2 Факторы, определяющие оптические свойства полупроводников в миллиметровом и субмиллиметровом диапазоне

Инфракрасный диапазон представляет собой своего рода границу между двумя режимами поглощения энергии в полупроводниках. При более низких частотах, соответствующих дальнему инфракрасному диапазону, каждый носитель заряда успевает совершить значительное количество столкновений с неоднородностями решетки до изменения направления поля и, следовательно, перемещается вслед за полем с некоторой дрейфовой скоростью. При более высоких частотах, соответствующих ближнему и среднему инфракрасному диапазону, носители за промежуток времени между столкновениями совершают многократные осцилляции под действием переменного вектора напряженности внешнего поля.

Диэлектрическая проницаемость полупроводников при взаимодействии с излучением дальнего инфракрасного диапазона обусловлена в основном свободными носителями и различными процессами их релаксации [5]. В качестве примеров механизмов релаксации, играющих основную роль в рассматриваемом температурном (30 – 120 К) и частотном (0.1 – 0.6 ТГц) интервале, следует отметить такие, как рассеяние на ионизированных примесях, акустическом и оптическом деформационном потенциале, полярных оптических фонах [41].

Вообще говоря, существует еще целый ряд факторов, оказывающих в той или иной степени влияние на линейную и нелинейную восприимчивость полупроводников, среди которых наиболее существенными являются разностные частоты фононных резонансов и мелкие примесные уровни, но их вклад в диэлектрическую проницаемость в данном случае либо мал, либо носит резонансный характер и потому не рассматривается.

Следует отметить, что с повышением частоты излучения и переходом в средний и ближний инфракрасный диапазон быстро возрастает роль решеточного поглощения энергии поля, и в некоторых случаях вклад именно

этого механизма в нелинейную восприимчивость, как показывает эксперимент, становится доминирующим [42]. При дальнейшем продвижении к частотам оптического диапазона его влияние вновь ослабевает. Таким образом появляется ограничение сверху по частоте на область применимости предлагаемого метода расчета нелинейных восприимчивостей. Граница его применимости, обусловленная усилением влияния ионного поглощения, лежит в районе среднего инфракрасного диапазона, то есть там, где выполняется условие приближенного равенства частоты внешней волны и частоты столкновений носителей.

При учете только взаимодействия излучения со свободными носителями комплексная диэлектрическая проницаемость полупроводника равна [38]:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 = \varepsilon_\infty \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2 + \tau_p^{-2}} \right) + i\varepsilon_\infty \omega^{-1} \tau_p^{-1} \left(\frac{\Omega^2}{\omega^2 + \tau_p^{-2}} \right), \quad (1.1)$$

где ω – частота волны, ε_∞ – статическая диэлектрическая проницаемость решетки, $\Omega = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{\varepsilon_\infty m}}$ – плазменная частота, N – концентрация свободных носителей, m – их эффективная масса, τ_p – время релаксации импульса (величина, обратная частоте столкновений носителей с неоднородностями решетки), e – элементарный заряд. Нелинейные свойства полупроводников, зависящие от взаимодействия излучения с газом свободных носителей, определяются величиной τ_p , которая зависит как от внешних условий: температуры решетки, длины волны падающего излучения, так и от свойств самого полупроводника: плотности, эффективной массы носителей, концентрации ионизированных примесей и ряда других параметров. Величина τ_p формируется вследствие совместного действия перечисленных выше механизмов рассеяния свободных носителей.

Отметим, что газ свободных носителей статистически обладает центральной симметрией, поэтому четные восприимчивости будут нулевыми, а поскольку ток, создаваемый носителями, отстает по фазе от колебаний внешнего поля, нечетные – отрицательными [43].

1.3 К точному решению задачи

Для задачи нахождения нелинейных восприимчивостей полупроводников в электромагнитных полях, вообще говоря, существует теоретический метод, в принципе позволяющий получить точное решение. Этот метод, основанный на рассмотрении зависящего от частоты обобщенного тензора диэлектрической проницаемости, описан, в частности, в [44]. Взаимодействие носителей заряда с решеткой в электромагнитном поле в данном методе представляется с помощью интегралов по траекториям. В результате аналитического вычисления интегралов по траекториям виковских символов получают операторные фаза и функционал влияния фононов на носители заряда при произвольной силе их связи с фононами. Отсюда выводится система обобщенных кинетических уравнений, описывающих временную эволюцию функций распределения носителей заряда и фононов при наличии электромагнитного поля. Далее интегрированием по траекториям виковских символов операторов вторичного квантования носителей получают интегралы столкновений в обобщенных кинетических уравнениях. При использовании этого метода может быть учтено влияние сразу всех процессов рассеяния носителей, оказывающих влияние на нелинейную восприимчивость полупроводника. К сожалению, он сопряжен со столь значительными вычислительными трудностями, что его практическое применение для вычисления нелинейных свойств конкретных полупроводников не представляется возможным.

Другой, уже приближенный, аналитический метод вычисления нелинейных восприимчивостей описан в [45]. Он основан на решении уравнения Бете-Солпитера, содержащего функцию Грина для пары электрон-дырка в приближении эффективной массы. Получив из этого уравнения функцию Грина, можно вывести уравнение для межзонной плотности состояний, откуда могут быть получены результаты для линейной и нелинейной поляризуемости полупроводников. Как правило, в связи со

сложностью получения аналитического решения уравнения для межзонной плотности состояний, на практике используются численные методы. Еще одна вычислительная проблема возникает вследствие того, что уравнение Бете-Солпитера представляет собой интегральное уравнение в пространстве импульсов и не имеет решения в элементарных и специальных функциях. Это существенно затрудняет его практическое использование.

Еще один традиционный прием для решения задач такого типа основан на блоховском приближении [43] и позволяет «из первых принципов» точно рассчитывать нелинейные восприимчивости. Блоховский подход является классическим методом, применяемым для анализа двухуровневых систем общего вида. В приложении к задаче нахождения нелинейных восприимчивостей его можно применить, если выполнено требование, заключающееся в том, что носитель заряда в среднем совершает значительное количество колебаний вместе с полем между взаимодействиями с решеткой и проходит целый спектр состояний. Данный подход хорошо работает в оптическом и ближнем инфракрасном диапазоне, но неприменим при продвижении в дальний инфракрасный диапазон, поскольку предполагает наличие излучения с длиной волны порядка нескольких десятков микрометров и менее, в рассматриваемом же случае изучаются волны длиной порядка сотен и тысяч микрометров.

Таким образом, точное решение поставленной задачи хоть и возможно в принципе, но практически крайне трудно осуществимо, что приводит к необходимости поиска приближенных методов ее решения.

В настоящей работе для приближенного расчета нелинейной поляризуемости полупроводников в дальнем инфракрасном и микроволновом диапазоне фактически предложен подход, основанный на приближении времен релаксации при учете взаимодействия излучения с носителями заряда.

1.4 Времена релаксации энергии и импульса

Как уже отмечалось, нелинейные свойства полупроводников в дальнем инфракрасном диапазоне определяются механизмами рассеяния свободных носителей. Эти механизмы определяют время релаксации импульса τ_p , входящее в выражение для диэлектрической проницаемости вещества (1.1). Каждый из процессов рассеяния носителей характеризуется своим временем релаксации импульса $\tau_{p,n}$, имеющим смысл обратной частоты столкновений носителей с неоднородностями решетки: $\tau_{p,n} = \nu_n^{-1}$. Согласно правилу Маттисена, эти процессы можно приближенно считать статистически независимыми. В этом предположении итоговая частота столкновений определяется как сумма парциальных частот [46]:

$$\nu = \sum_n \nu_n,$$

а итоговое время релаксации импульса, соответственно, составляет

$$\tau_p^{-1} = \sum_n \tau_{p,n}^{-1}.$$

Парциальные времена релаксации импульса $\tau_{p,n}$ зависят от температуры решетки T и энергии носителей ξ , которая, в свою очередь, зависит от напряженности внешнего поля E . Для волн миллиметрового и субмиллиметрового диапазона можно исходить из предположения о квазитермализованности подсистемы носителей, то есть ввести температуру носителей T_e , не совпадающую с T . При оценке температуры носителей важную роль играет такая характеристика процесса рассеяния, как время релаксации энергии $\tau_{e,n}$, то есть характерное время установления квазиравновесного распределения с температурой T_e . По аналогии со временем релаксации импульса, пользуясь статистической независимостью процессов, итоговое время

релаксации энергии выражается через парциальные времена релаксации:

$$\tau_e^{-1} = \sum_n \tau_{e,n}^{-1}.$$

Предположение о квазитермализованности подсистемы носителей справедливо при условии, что длительность импульса излучения превышает время релаксации энергии. Температуру носителей T_e , как показано ниже, можно выразить через напряженность поля E , зная их функцию распределения.

Отметим, что времена релаксации импульса $\tau_{p,n}$ и энергии $\tau_{e,n}$ существенно различаются. Так, для рассеяния на ионизированных примесях величина τ_e в пределе $T \rightarrow 0$ стремится к бесконечности, поскольку в этом случае взаимодействие является практически абсолютно упругим (тогда как время релаксации импульса стремится к нулю). Для фононного рассеяния значение $\tau_{e,n}$ также превосходит $\tau_{p,n}$ и варьируется для разных механизмов рассеяния.

Более подробно роль времени релаксации энергии и метод его расчета будут рассмотрены ниже.

1.5 Оценка температуры носителей

Оценку величины электронной температуры T_e для квазитермализованных носителей можно получить, исходя из следующих соображений. Приращение энергии носителей в единицу времени за счет внешнего поля равно произведению силы $e\vec{E}$, с которой поле действует на носители, на скорость дрейфа носителей $\mu\vec{E}$, где μ - их подвижность. В состоянии квазиравновесия это приращение равно средней энергии, теряемой носителями при столкновениях:

$$\mu e E^2 = - \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\rangle.$$

Для невырожденных полупроводников и теплых носителей фермиевскую функцию распределения носителей в зоне проводимости можно достаточно точно аппроксимировать бoльцмановской $\exp\left(-\frac{\xi}{kT}\right)$.

Средняя энергия носителей в отсутствие поля ξ_0 вычисляется как [47]:

$$\xi_0 = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \xi f_0 d^3v,$$

что для бoльцмановского распределения дает $\xi_0 = \frac{3}{2}kT$ (здесь ξ - энергия носителей, f_0 - их функция распределения). Введя время релаксации энергии τ_e как

$$\frac{\langle \xi \rangle - \xi_0}{\tau_e} = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi}{\tau_p} (f - f_0) d^3v,$$

где $\langle \xi \rangle$ - средняя энергия теплых носителей, f - их функция распределения, можно получить следующее равенство:

$$\frac{d\langle \xi \rangle}{dt} - \mu e E^2 + \frac{\langle \xi \rangle - \xi_0}{\tau_e} = 0.$$

В невырожденном газе носителей разницу между значениями $\langle \xi \rangle$ и ξ_0 можно представить как

$$\langle \xi \rangle - \xi_0 = \frac{3}{2} k(T_e - T).$$

Учитывая, что в стационарном случае $\frac{d\langle \xi \rangle}{dt} = 0$, получим:

$$\mu e E^2 = \frac{3}{2} k \frac{T_e - T}{\tau_e}.$$

Представляя подвижность носителей μ как $\frac{e}{m} \tau_p$, получим соотношение, устанавливающее связь между временем релаксации импульса τ_p , временем релаксации энергии τ_e , температурой носителей T_e и полем E :

$$\frac{e^2 \tau_p E^2}{m} = \frac{3}{2} k \frac{T_e - T}{\tau_e}. \quad (1.2)$$

(Подвижность μ , вообще говоря, зависящую от напряженности поля E , для теплых носителей можно считать совпадающей с подвижностью в отсутствии поля, так как отношение $\frac{T_e}{T}$, от которого зависит вклад напряженности в величину μ , при этом близко к единице).

В результате диэлектрическая проницаемость может быть выражена как функция напряженности поля: $\varepsilon = \varepsilon(\tau_p(T_e(E)))$.

Поляризуемость при этом является суммой линейной и нелинейной частей:

$$P = P_l + P_{nl}.$$

Нелинейные восприимчивости вводятся стандартным образом разложением нелинейной части P_{nl} в ряд по степеням напряженности поля E :

$$P_{nl} = 4\pi\chi^{(2)} E^2 + 4\pi\chi^{(3)} E^3 + \dots$$

1.6 Характеристика основных процессов рассеяния

Рассмотрим основные механизмы рассеяния свободных носителей в полупроводниках и выражения для расчета времен релаксации энергии и импульса для каждого из механизмов. Хотя некоторые приближенные результаты можно получить и классическими методами [48], квантовомеханический подход оказывается значительно более эффективным, поэтому далее будет использоваться именно он.

1.6.1 Рассеяние на ионизированных примесях

При низких температурах решетки T энергия носителей мала, и ключевую роль в релаксации импульса играет рассеяние на ионизированных примесях. Для изучения характеристик процесса рассеяния требуется решить нестационарное уравнение Шредингера

$$[H + |e|V(r)]\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

где H – гамильтониан, $V(r)$ – потенциал примесного иона, \hbar – постоянная Планка, Ψ – волновая функция носителя. В качестве $V(r)$ удобно использовать потенциал Юкавы

$$V(r) = -\frac{Z|e|}{4\pi\epsilon_{\infty}\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{L_D}\right),$$

который учитывает эффект экранирования заряженной примеси (здесь Z – кратность ионизации примеси, ϵ_0 – электрическая постоянная, L_D – дебаевский радиус экранирования). Время релаксации импульса при этом определяется выражением [47]

$$\tau_{p,1} = \left(\frac{v}{(2\pi)^3} \int k'^2 dk' \int_0^{\pi} S(\vec{k}, \vec{k}') (1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta \right)^{-1}, \quad (1.3)$$

где v – объем кристалла, k и k' – состояния носителя, соответствующие волновым векторам \vec{k} и \vec{k}' , θ – угол рассеяния, который вводится при

переходе к полярным координатам относительно направления \vec{k} , $S(\vec{k}, \vec{k}')$ – вероятность перехода носителя из состояния k в состояние k' , зависящая от матричного элемента гамильтониана $H_{k'k}$:

$$S(\vec{k}, \vec{k}') = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{k'k}|^2 \delta(\xi(\vec{k}') - \xi(\vec{k})). \quad (1.4)$$

Здесь $\delta(\xi(\vec{k}') - \xi(\vec{k}))$ – дельта-функция. Матричный элемент $H_{k'k}$ при рассеянии на ионизированных примесях равен

$$H_{k'k} = \frac{|e|}{v} \int V(r) \exp[i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{r}] d^3r.$$

Отсюда можно получить выражение для времени релаксации импульса, известное как соотношение Брукса-Херринга [49]:

$$\tau_{p,1} = \frac{\langle \xi \rangle^{3/2} 16\pi \sqrt{2m} \left(\frac{\epsilon_\infty \epsilon_0}{Ze^2} \right)^2}{N_i [\ln(1 + \beta) + \beta^2 (1 + \beta^2)^{-1}]},$$

где N_i – концентрация примесей, а параметр β зависит от дебаевского радиуса экранирования L_D и от температуры решетки T . В рассматриваемом случае слабой логарифмической зависимостью можно пренебречь, при этом выражение приобретает вид [50]:

$$\tau_{p,1} = \frac{A_1}{N_i} T_e^{3/2}.$$

Здесь значение параметра A_1 с большей надежностью определяется из экспериментальных данных, хотя и может быть рассчитано теоретически. Взаимодействие носителей с ионизированными примесями можно с высокой точностью рассматривать как абсолютно упругие столкновения, в связи с чем понятие времени релаксации энергии теряет смысл.

1.6.2 Рассеяние на акустических фононах

С ростом температуры решетки увеличивается вклад в нелинейную восприимчивость взаимодействия носителей с фононами, то есть таких механизмов, как рассеяние на акустических, а также полярных и неполярных оптических фононах.

При рассеянии носителей на акустическом деформационном потенциале (акустических фононах) для нахождения времени релаксации импульса взаимодействие можно считать практически упругим и использовать формулу (1.3), подставив другое значение вероятности рассеяния $S(\vec{k}, \vec{k}')$. Вероятности рассеяния при испускании и поглощении фонона равны между собой, как и матричные элементы гамильтониана $H_{k'k}$, поэтому вероятность рассеяния при этом механизме может быть получена умножением на два правой части формулы (1.4):

$$S(\vec{k}, \vec{k}') = \frac{4\pi}{\hbar} |H_{k'k}|^2 \delta(\xi(\vec{k}') - \xi(\vec{k})),$$

где

$$H_{k'k} = \varepsilon_a \sqrt{\frac{kT}{2v_e \rho c_s^2}}.$$

Здесь ε_a – константа акустического деформационного потенциала для валентной зоны, v_e – объем элементарной ячейки, ρ – плотность вещества, c_s – скорость звука в полупроводнике. Значение времени релаксации импульса получается аналогично случаю рассеяния на ионизированных примесях и составляет, опять же в пренебрежении логарифмической зависимостью,

$$\tau_{p,2} = A_2 T^{-3/2} \left(\frac{T_e}{T} \right)^{-1/2}.$$

Здесь, как и в случае ионизированных примесей, значение параметра A_2

может быть как определено экспериментальным путем, так и рассчитано [51]:

$$A_2 = \frac{4\sqrt{\pi}\rho c_s^2 \hbar^4}{3\sqrt{2}m^{3/2}E_1^2 k^{3/2}}. \quad (1.5)$$

Отношение температуры носителей к температуре решетки $\frac{T_e}{T}$ определяется по формуле [47]:

$$\frac{T_e}{T} = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{3\pi}{8} \left(\frac{\mu E}{c_s} \right)^2} \right],$$

где μ - подвижность носителей в отсутствие поля (вообще говоря, зависящая от температуры решетки). В случае теплых носителей ($T_e - T \ll T$) их электронная температура растет пропорционально квадрату напряженности поля E и может быть аппроксимирована следующим образом:

$$\frac{T_e}{T} = 1 + \frac{3\pi\mu^2}{32c_s^2} E^2, \quad (1.6)$$

откуда

$$\tau_{p,2} = A_2 T^{-3/2} \left(1 + \frac{3\pi\mu^2}{32c_s^2} E^2 \right)^{-1/2}. \quad (1.7)$$

Несмотря на то, что акустическое рассеяние является почти упругим, некоторые потери энергии при нем происходят, и для него уже можно ввести время релаксации энергии τ_e . Подставляя отношение температур носителей и решетки (1.6) в формулу (1.2), получим выражение для времени релаксации энергии при рассеянии на акустических фононах:

$$\tau_{e,2} = \frac{9\pi\mu k T}{64e c_s^2}.$$

Отметим, что для большинства полупроводников при рассеянии на акустическом деформационном потенциале время релаксации энергии превосходит время релаксации импульса примерно на порядок.

1.6.3 Рассеяние на неполярных оптических фононах

Для полупроводников, у которых кристаллическая решетка содержит более одного типа атомов, следует также рассматривать виды рассеяния, связанные с колебаниями элементарных ячеек: рассеяние на полярных и неполярных оптических фононах. Такие процессы рассеяния являются существенно неупругими, и для них время релаксации энергии ближе к времени релаксации импульса.

При рассеянии носителей на оптических фононах время релаксации импульса определяется по формуле [76]:

$$\tau_p = \left(\frac{\sqrt{2}vm^{3/2}}{\pi\hbar^4} |H_{k'k}|^2 \left[\sqrt{\xi + \hbar\omega_0} + \exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right) \operatorname{Re} \sqrt{\xi - \hbar\omega_0} \right] \right)^{-1}, \quad (1.8)$$

где ω_0 - частота оптического фонона.

Матричный элемент гамильтониана при рассеянии на неполярных оптических фононах (оптическом деформационном потенциале) равен [77]

$$|H_{k'k}| = D \sqrt{\left(\left[\exp\left(\frac{\Theta}{T} - 1\right) \right] + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar}{2\rho v_e \omega_0}},$$

где D – константа оптического деформационного потенциала, Θ – температура Дебая. Выбор знака в выражении под корнем зависит от того, испускается или поглощается фонон. Отсюда время релаксации импульса составит

$$\tau_{p,3} = \left(\frac{m^{3/2} D^2}{\pi^{3/2} \hbar^2 \rho \sqrt{k\Theta}} \frac{\sqrt{\lambda z} K_1(\lambda z)}{\operatorname{sh} z} \operatorname{ch}[(1-\lambda)z] \right)^{-1},$$

где $\lambda = \frac{T}{T_e}$, $z = \frac{\Theta}{2T}$, K_1 – модифицированная функция Бесселя. В случае

теплых носителей ($\lambda \approx 1$), когда можно без потери точности провести замену

$$\operatorname{sh}[(1-\lambda)z] \rightarrow z \frac{T_e - T}{T}, \quad \text{отсюда следует не зависящее от температуры}$$

носителей выражение:

$$\tau_{p,3} = \frac{\pi^{3/2} \hbar^2 \rho \sqrt{k\Theta}}{m^{3/2} D^2} \frac{sh z}{\sqrt{z} K_1(z)}.$$

Энергия, передаваемая носителями решетке за единицу времени при этом механизме рассеяния, составляет

$$-\left\langle \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\rangle = \frac{m^{3/2} D^2 \sqrt{k\Theta}}{\pi^{3/2} \hbar^2 \rho} \frac{\sqrt{\lambda z} K_1(\lambda z)}{sh z} sh[(1-\lambda)z].$$

Отсюда следует также не зависящее от температуры теплых носителей выражение для времени релаксации энергии:

$$\tau_{e,3} = \frac{3\pi^{3/2} \hbar^2 \rho \sqrt{k\Theta}}{4 m^{3/2} D^2} \frac{sh z}{z^{5/2} K_1(z)}. \quad (1.9)$$

1.6.4 Рассеяние на полярных оптических фононах

Для полярных полупроводников рассмотрим процесс рассеяния на полярных оптических фононах. Для этого механизма матричный элемент гамильтониана равен [47]

$$|H_{k'k}| = \sqrt{\left(\left[\exp\left(\frac{\Theta}{T}\right) - 1 \right] + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \frac{2^{3/2} \pi \hbar \alpha (\hbar \omega_0)^{3/2}}{v m^{1/2} |\vec{k}' - \vec{k}|^2}},$$

где α – постоянная тонкой структуры, K_0 – модифицированная функция Бесселя. Выбор знака опять определяется тем, поглощается или испускается фонон. Выражение для релаксации импульса, получающееся подстановкой матричного элемента в (1.8), для теплых носителей при температуре решетки много меньше дебаевской хорошо аппроксимируется как [50, 52]:

$$\tau_{p,4} = \frac{\exp\left(\frac{\Theta}{T}\right)}{2\alpha\omega_0}. \quad (1.10)$$

Потери энергии носителями за единицу времени для этого механизма рассеяния составляют

$$-\left\langle \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\rangle = \frac{2^{3/2} \alpha (k\Theta)^2}{\pi^{1/2} \hbar} \frac{\sqrt{\lambda z} K_0(\lambda z)}{sh z} sh[(1-\lambda)z].$$

Как и в случае неполярного рассеяния для теплых носителей время релаксации энергии практически не зависит от температуры носителей:

$$\tau_{e,4} = \frac{3\sqrt{\pi}}{2^{7/2} \alpha \omega_0} \frac{sh z}{z^{5/2} K_0(z)}.$$

1.7 Важнейшие механизмы рассеяния для полупроводников типа АШВУ

1.7.1 Общие результаты

Численные расчеты времен релаксации энергии и импульса, основанные на использовании приведенных выше выражений, соответствующих всем в принципе возможным процессам рассеяния, были проведены для ряда полупроводников типа АШВУ. Характерные параметры для кристаллов арсенида галлия GaAs, арсенида индия InAs и фосфида индия InP, взятые из наиболее надежных литературных источников, приведены в таблице 1.1. Расчеты показали, что основными механизмами рассеяния, определяющими нелинейные свойства указанных полупроводников в дальнем инфракрасном и микроволновом диапазоне, являются полярное оптическое рассеяние, рассеяние на акустическом деформационном потенциале и на ионизированных примесях. Так, существенный вклад в процесс релаксации энергии носителей, а, следовательно, и в формирование электронной температуры их подсистемы в рассмотренном диапазоне температур кристаллической решетки (30 – 120 К) оказывают акустические и полярные оптические фононы. Релаксация импульса в том же температурном диапазоне происходит в основном на ионизированных примесях и акустических фононах. Рассеяние на оптическом деформационном потенциале при этом не оказывает заметного влияния ни на время релаксации энергии, ни на время релаксации импульса. Однако же отметим, что время релаксации энергии за счет этого механизма при температурах выше 60 – 80 К меньше, чем за счет акустического рассеяния, что позволяет предположить, что для неполярных кристаллов он будет существенно влиять на их нелинейные свойства [53]. Рассмотрим далее более подробно результаты, полученные для конкретных полупроводников типа АШВУ.

1.7.2 Арсенид галлия

Для арсенида галлия при температурах порядка 30 – 40 К основной вклад в релаксацию энергии дает рассеяние на акустическом деформационном потенциале, но с ростом температуры, то есть при приближении ее к дебаевской, его роль ослабевает, и рассеяние на полярных оптических фононах становится единственным механизмом, определяющим температуру носителей. Зависимости времени релаксации энергии от температуры решетки для рассеяния на акустических, неполярных и полярных оптических фононах, а также результирующее время релаксации для GaAs показаны на рис. 1.1.

Релаксация импульса при низких температурах, вследствие вымораживания фононов, происходит в основном на ионизированных примесях. С ростом температуры возрастает роль фононного рассеяния, которое начинает проявляться при температурах около 60 К, а при температурах порядка 100 – 120 К рассеяние на акустических фононах становится доминирующим механизмом. Следует заметить, что поскольку в весьма широком температурном диапазоне для акустических фононов время релаксации импульса убывает по степенному закону (1.7), а для оптических – по экспоненциальному (1.9, 1.10), возможно предположить увеличение вклада оптических фононов в релаксацию импульса при более высоких температурах (но не слишком близких к дебаевской, когда приближение (1.10) перестает быть справедливым). На рис. 1.2 показаны зависимости времени релаксации импульса от температуры решетки для рассеяния на ионизированных примесях, акустических и полярных оптических фононах, а также результирующее время релаксации для GaAs.

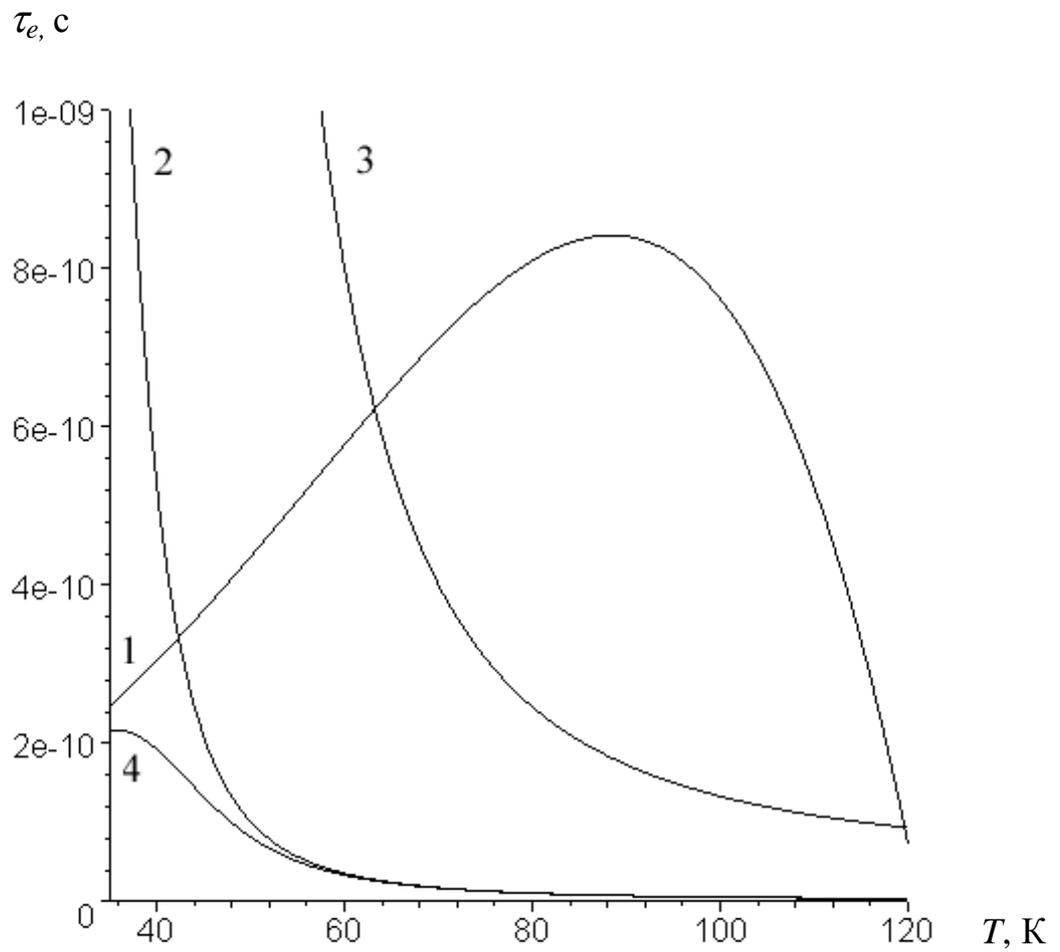


Рис. 1.1. Время релаксации энергии для GaAs. 1 – акустические фононы, 2 – полярные оптические фононы, 3 – неполярные оптические фононы, 4 – результирующее время.

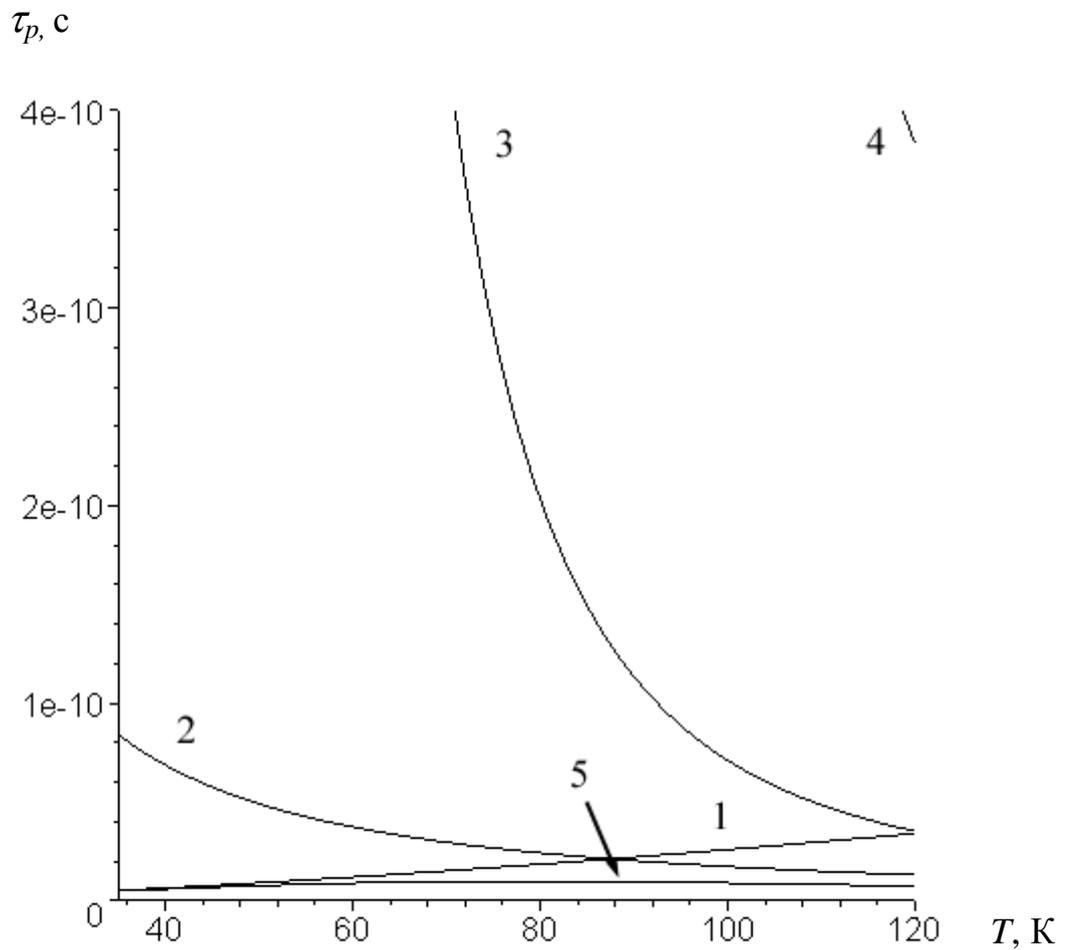


Рис. 1.2. Время релаксации импульса для GaAs. 1 – ионизированные примеси ($N = 10^{15} \text{ см}^{-3}$), 2 – акустические фононы, 3 – полярные оптические фононы, 4 – неполярные оптические фононы, 5 – результирующее время.

1.7.3 Арсенид индия

Как видно из рис. 1.3, на котором приведены кривые времени релаксации энергии для различных механизмов рассеяния для InAs, в целом профиль зависимости результирующего времени релаксации энергии для арсенида индия близок к полученному для арсенида галлия, с той лишь разницей, что оптическое рассеяние несколько более сильно влияет на его форму при низких температурах. По величине же время релаксации энергии примерно в три раза меньше, чем для арсенида галлия.

Время релаксации импульса для этого полупроводника практически полностью определяется рассеянием носителей на ионизированных примесях и лишь при температуре около 100 К начинает проявляться влияние акустических фононов. На рис. 1.4, где приведены кривые времени релаксации импульса для различных механизмов рассеяния, видно, что результирующая кривая весьма слабо отклоняется вниз при высоких температурах за счет фононного рассеяния, кривые же для оптических фононов лежат существенно выше, и, если эти механизмы и дают сколько-нибудь значительный вклад в значение времени релаксации импульса, то это происходит при существенно более высоких температурах, что выходит за рамки настоящего рассмотрения.

1.7.4 Фосфид индия

Результирующие зависимости для времен релаксации энергии (рис. 1.5) и импульса (рис. 1.6) для фосфида индия очень близки к соответствующим кривым для арсенида индия. Отметим, однако, что кривая на рис. 1.6, соответствующая оптическому полярному рассеянию, лежит существенно ниже, чем на рис. 1.4, что позволяет предположить значительные отличия времен релаксации импульса, а следовательно и нелинейных восприимчивостей, для этих полупроводников при температурах порядка

150 – 200 К в связи с гораздо более сильным влиянием у фосфида индия полярных оптических фононов.

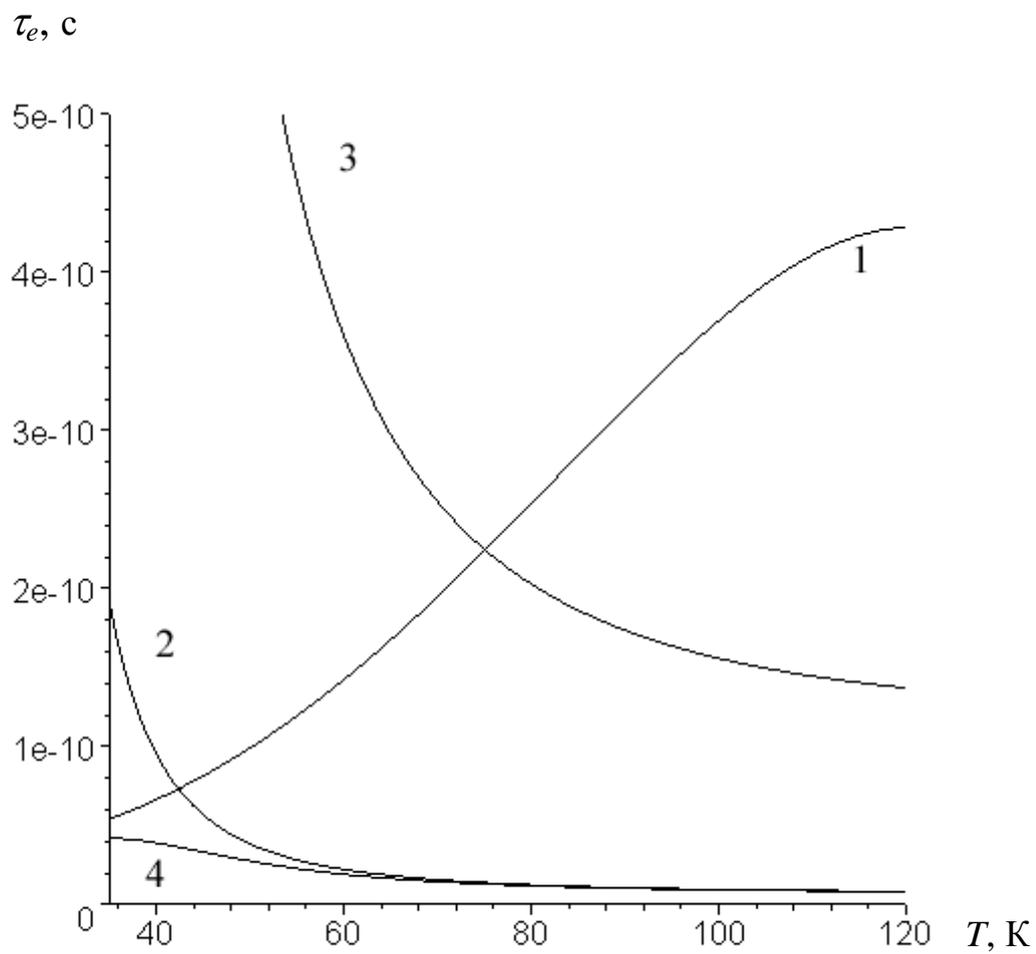


Рис. 1.3. Время релаксации энергии для InAs. 1 – акустические фононы, 2 – полярные оптические фононы, 3 – неполярные оптические фононы, 4 – результирующее время.

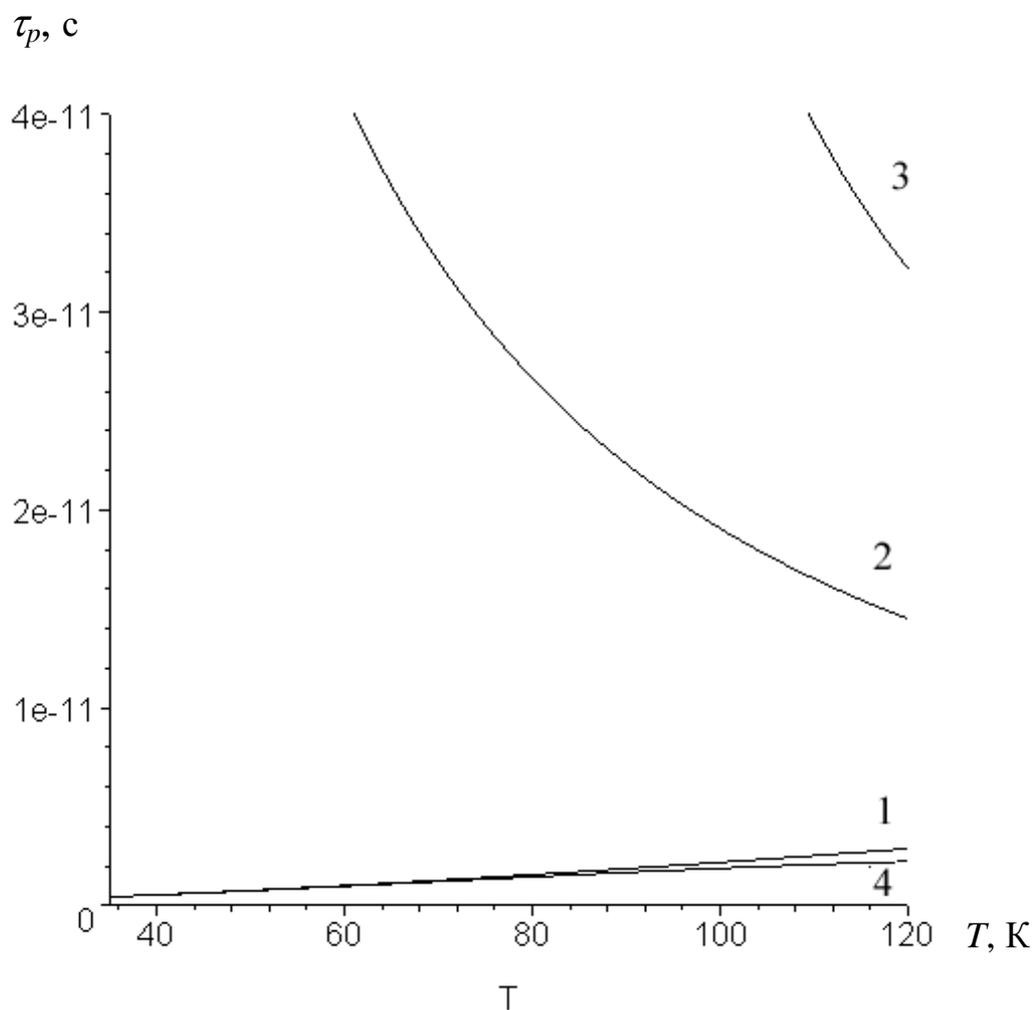


Рис. 1.4. Время релаксации импульса для InAs. 1 – ионизированные примеси ($N = 10^{15} \text{ см}^{-3}$), 2 – акустические фононы, 3 – полярные оптические фононы, 4 – результирующее время.

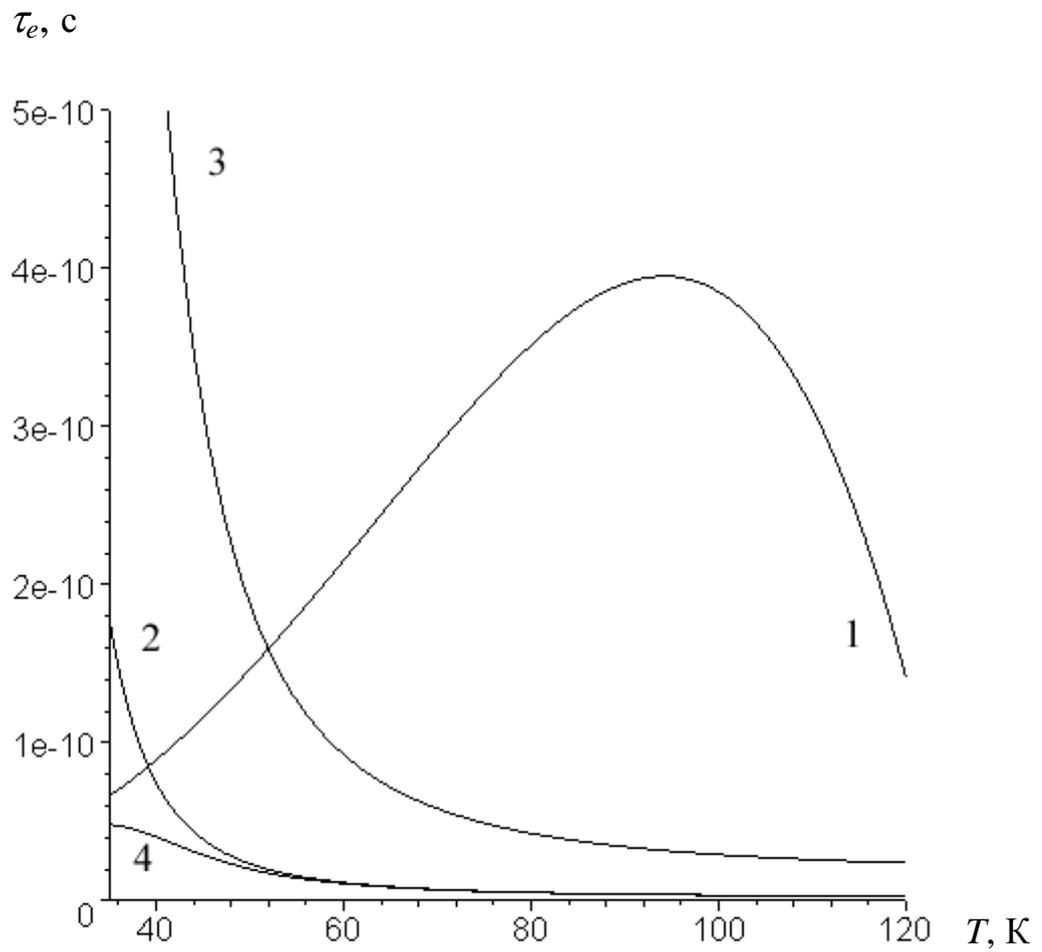


Рис. 1.5. Время релаксации энергии для InP. 1 – акустические фононы, 2 – полярные оптические фононы, 3 – неполярные оптические фононы, 4 – результирующее время.

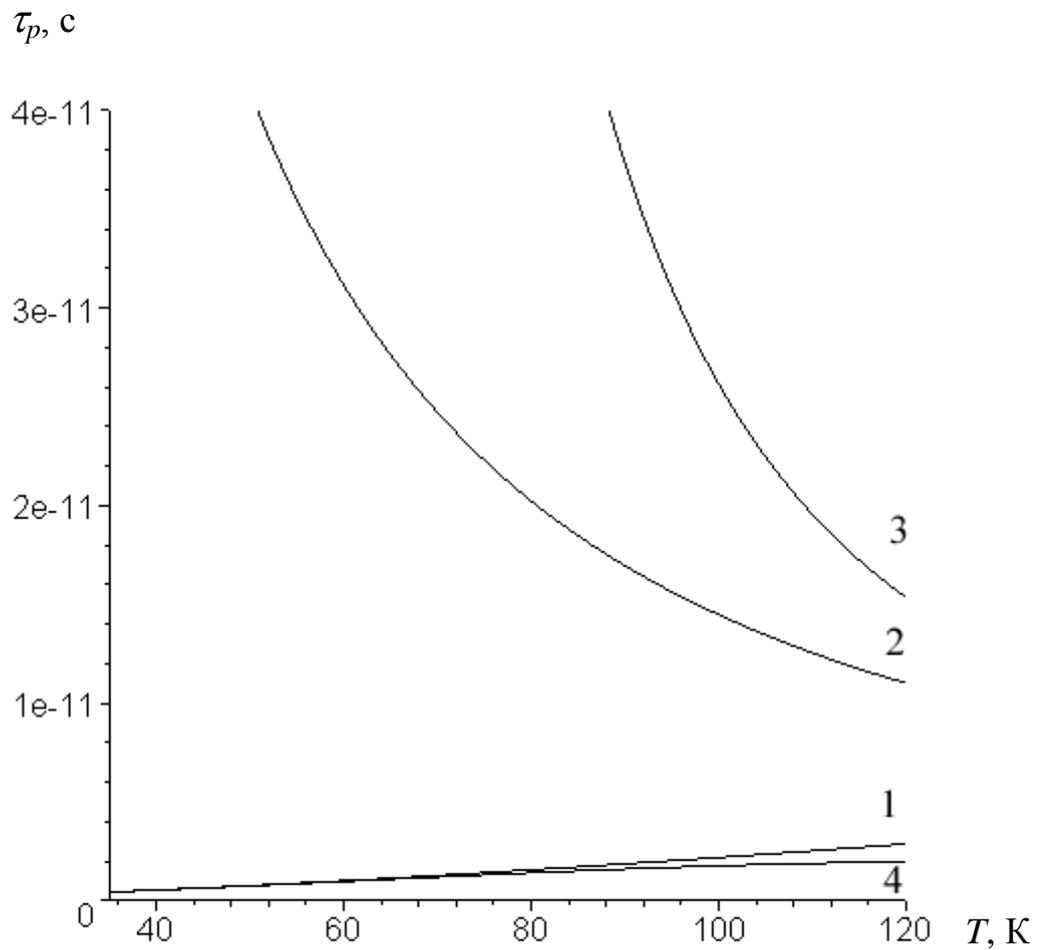


Рис. 1.6. Время релаксации импульса для InP. 1 – ионизированные примеси ($N = 10^{15} \text{ см}^{-3}$), 2 – акустические фононы, 3 – полярные оптические фононы, 4 – результирующее время.

1.8 Значения $\chi^{(3)}$ для различных полупроводников типа АШВУ

1.8.1 Введение

Как показано выше, все процессы релаксации импульса существенным образом зависят от температуры решетки и от эффективной температуры носителей. Тот факт, что диэлектрическая проницаемость, в свою очередь зависит от времени релаксации импульса, а температура носителей зависит от напряженности поля, позволяет учесть зависимость диэлектрической проницаемости от напряженности поля, другими словами,

$$\varepsilon = \varepsilon(\tau_p(T_e(E))).$$

Поляризуемость при этом, помимо линейной части P_l , включает и нелинейную часть P_{nl} :

$$P = P_l + P_{nl}.$$

Нелинейные восприимчивости вводятся стандартным образом разложением нелинейной поляризуемости P_{nl} в ряд по степеням напряженности поля E :

$$P_{nl} = 4\pi\chi^{(2)}E^2 + 4\pi\chi^{(3)}E^3 + \dots$$

В рассматриваемой модели предполагается, что среда обладает центральной симметрией, поэтому значения восприимчивостей четного порядка для нее равны нулю.

Расчеты нелинейной восприимчивости третьего порядка $\chi^{(3)}$ проводились для нескольких полупроводников типа АШВУ: арсенида галлия GaAs, арсенида индия InAs и фосфида индия InP [54]. Вычисления осуществлялись на основе экспериментальных данных для большинства параметров, в том числе A_1 , D (табл. 1.1), температурной зависимости подвижности носителей в отсутствие поля (поскольку для теплых носителей подвижность от напряженности поля зависит очень слабо, такое приближение в данном случае допустимо) [52, 55 – 57] и ряда других. Значения параметра A_2

вычислялись по формуле (1.5). Используемые в расчетах значения параметров приведены в таблице 1.1. Вычисления проводились для температурного диапазона 30 – 120 К и для волн длиной 500 – 3000 мкм. Значение концентрации примесей при этом варьировалось в пределах между 10^{14} и 10^{17} см⁻³.

Для всех рассмотренных полупроводников полученные значения $\chi^{(3)}$, как и ожидалось, отрицательны (это следует из того, что ток, создаваемый носителями, отстает по фазе от колебаний внешнего поля). На рис. 1.7 – 1.18 приведены зависимости абсолютной величины $\chi^{(3)}$ от температуры решетки, длины волны и концентрации примесей. Предваряя анализ поведения $\chi^{(3)}$ для конкретных полупроводников, остановимся на общих тенденциях.

1.8.2 Общие результаты

В первую очередь следует отметить, что по абсолютной величине значения нелинейной восприимчивости третьего порядка $\chi^{(3)}$ в дальнем инфракрасном и микроволновом диапазоне весьма велики и превышают типичные значения для традиционных нелинейных кристаллов оптического диапазона на два-три порядка. Тот факт, что нелинейные свойства полупроводников более ярко выражены в длинноволновом диапазоне, нежели в оптическом, подтверждается и экспериментально, в частности, в [14].

С ростом температуры (рис. 1.7) при достаточно малых концентрациях примесей происходит ярко выраженное уменьшение нелинейности (на 2 – 3 порядка). Это объясняется ослаблением влияния рассеяния на ионизированных примесях при их малых концентрациях вследствие увеличения средней энергии носителей и достаточно медленным уменьшением времени релаксации импульса при рассеянии на полярных оптических фононах. При больших же концентрациях примесей рассеяние на них оказывает существенное влияние на нелинейность даже при достаточно высоких

температурах, и значение $\chi^{(3)}$ с ростом температуры изменяется весьма незначительно.

Заметное убывание по абсолютной величине $\chi^{(3)}$ с уменьшением длины волны от 3000 до 500 мкм (рис. 1.8), особенно при низких концентрациях примесей, объясняется законом дисперсии (1.1), в соответствии с которым рост частоты внешнего поля приводит к ослаблению влияния процессов релаксации на диэлектрическую проницаемость полупроводника. Отметим, однако, что в области более коротких волн эта тенденция может не сохраняться, так как предположение о квазитермализованности системы носителей при этом перестает быть справедливым. Кроме того, как отмечалось ранее, при продвижении в область среднего инфракрасного излучения существенный вклад в нелинейность оказывает поглощение энергии волны за счет движения ионов.

Примечательна зависимость нелинейной восприимчивости $\chi^{(3)}$ от концентрации, имеющая участок насыщения с максимумом или без него (рис. 1.9). С уменьшением концентрации ионизированных примесей уменьшается вероятность рассеяния на них, и, следовательно, увеличивается время релаксации импульса для этого механизма рассеяния, что приводит к увеличению вклада рассеяния на фононах в общее время релаксации. Рассеяние на фононах не зависит от средней энергии носителей, и при малых концентрациях примеси $\chi^{(3)}$ уменьшается по абсолютному значению. При высоких же концентрациях примеси уменьшается подвижность носителей, что приводит к уменьшению отношения температуры носителей к температуре решетки и вызывает уменьшение зависимости диэлектрической проницаемости от поля волны.

Таблица 1.1.

Значения параметров, использованных при расчете нелинейных восприимчивостей

Параметр	GaAs	InP	InAs
Статическая диэлектрическая проницаемость решетки ϵ_{∞}	10.0	9.5	12.2
Скорость звука c_s , см/с	$5.0 \cdot 10^5$	$5.1 \cdot 10^5$	$3.1 \cdot 10^5$
Эффективная масса m	0.07	0.03	0.07
Параметр A_1 , $\text{с} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{К}^{-3/2}$	$2.6 \cdot 10^{-14}$	$2.2 \cdot 10^{-15}$	$2.2 \cdot 10^{-15}$
Параметр A_2 , $\text{с} \cdot \text{К}^{3/2}$	$1.7 \cdot 10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-8}$	$1.9 \cdot 10^{-8}$
Константа оптического деформационного потенциала D , эВ/см	$8.0 \cdot 10^{-4}$	$8.0 \cdot 10^{-4}$	$8.0 \cdot 10^{-4}$
Частота оптического фонона ω_0 , с^{-1}	$7.0 \cdot 10^{12}$	$7.0 \cdot 10^{12}$	$9.3 \cdot 10^{12}$
Плотность ρ , $\text{г}/\text{см}^3$	6.0	4.8	4.8
Температура Дебая Θ , К	420.0	320.0	270.0

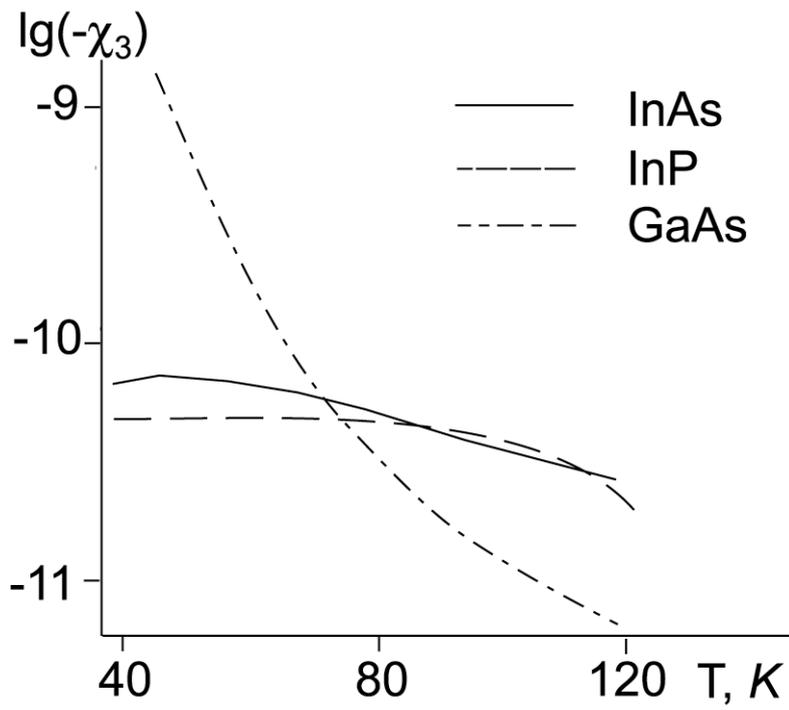


Рис. 1.7. Температурная зависимость $\chi^{(3)}$. GaAs – штрихпунктирная линия, InAs – сплошная линия, InP – штриховая линия. $\lambda = 2\,000$ мкм, $N = 10^{17}$ см $^{-3}$.

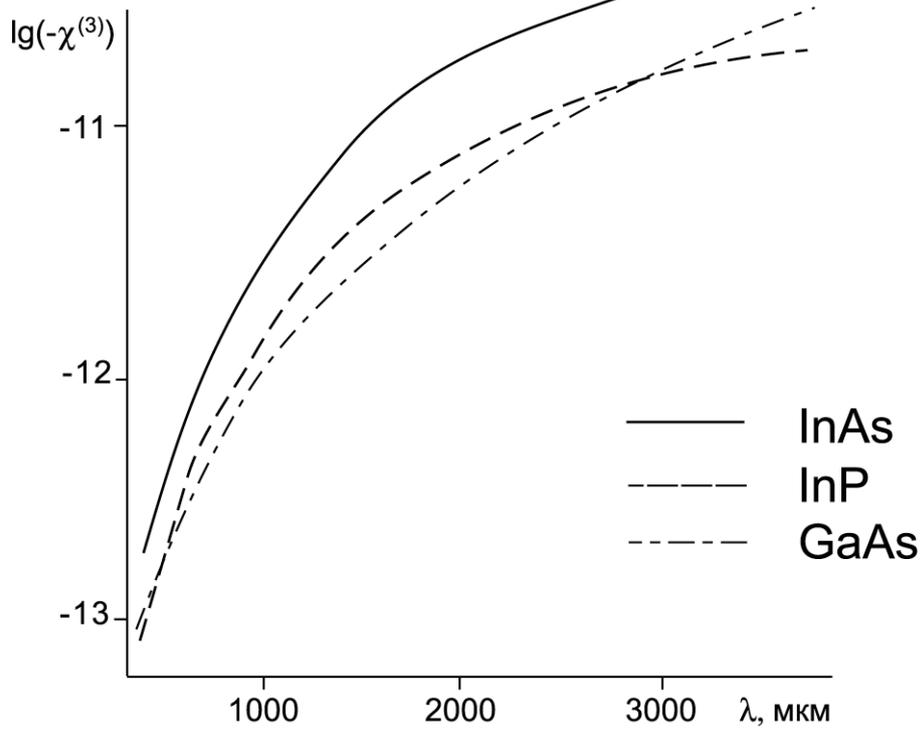


Рис. 1.8. Зависимость $\chi^{(3)}$ от длины волны. GaAs – штрихпунктирная линия, InAs – сплошная линия, InP – штриховая линия. $T = 70 \text{ K}$, $N = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$.

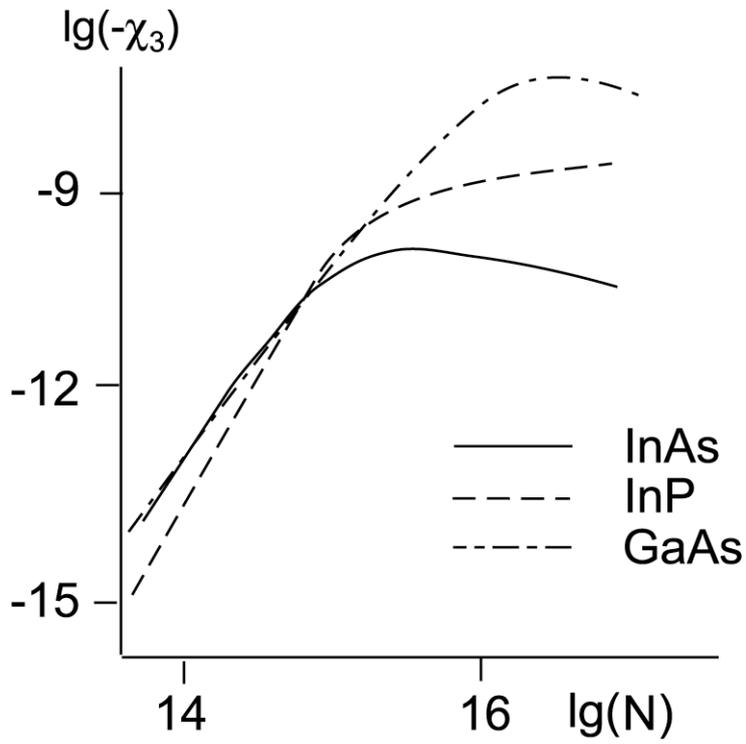


Рис. 1.9. Концентрационная зависимость $\chi^{(3)}$. GaAs – штрихпунктирная линия, InAs – сплошная линия, InP – штриховая линия. $T = 70$ К, $\lambda = 2000$ мкм.

1.8.3 Арсенид галлия

Арсенид галлия обладает значительной нелинейностью в области низких температур, но с ростом температуры ее величина быстро убывает (рис. 1.10) и к 80 К оказывается сравнимой со значениями для других полупроводников, а к 120 К значительно более низкой [58]. Изменение абсолютного значения $\chi^{(3)}$ с ростом температуры для арсенида галлия составляет около трех порядков в широком диапазоне длин волн и концентрации носителей. С уменьшением длины волны от 3000 до 500 мкм происходит столь же заметное уменьшение нелинейной восприимчивости третьего порядка (рис. 1.11). Концентрационная зависимость $\chi^{(3)}$ обнаруживает быстрый рост абсолютной величины с увеличением концентрации примесей (рис. 1.12). При концентрации порядка 10^{16} см⁻³ рост заметно замедляется, и после прохождения максимума нелинейность начинает медленно уменьшаться. Среди рассмотренных полупроводников арсенид галлия обладает наибольшей нелинейностью: так, при достаточно низких температурах и высоких концентрациях примесей абсолютная величина $\chi^{(3)}$ для него может достигать значений порядка 10^{-6} .

1.8.4 Арсенид индия

У арсенида индия уменьшение значения нелинейной восприимчивости третьего порядка с ростом температуры выражено значительно слабее, чем у арсенида галлия и составляет один порядок и менее (рис. 1.13) даже при низких концентрациях носителей. При высоких же концентрациях наблюдается даже слабый рост нелинейности. Характер зависимости нелинейности от длины волны (рис. 1.14) при низких концентрациях сходен с полученным для арсенида галлия. Концентрационная зависимость величины $\chi^{(3)}$ (рис. 1.15) показывает несколько меньший рост нелинейности с наступлением насыщения и достижение максимального значения уже при концентрации примесей порядка 10^{15} см⁻³.

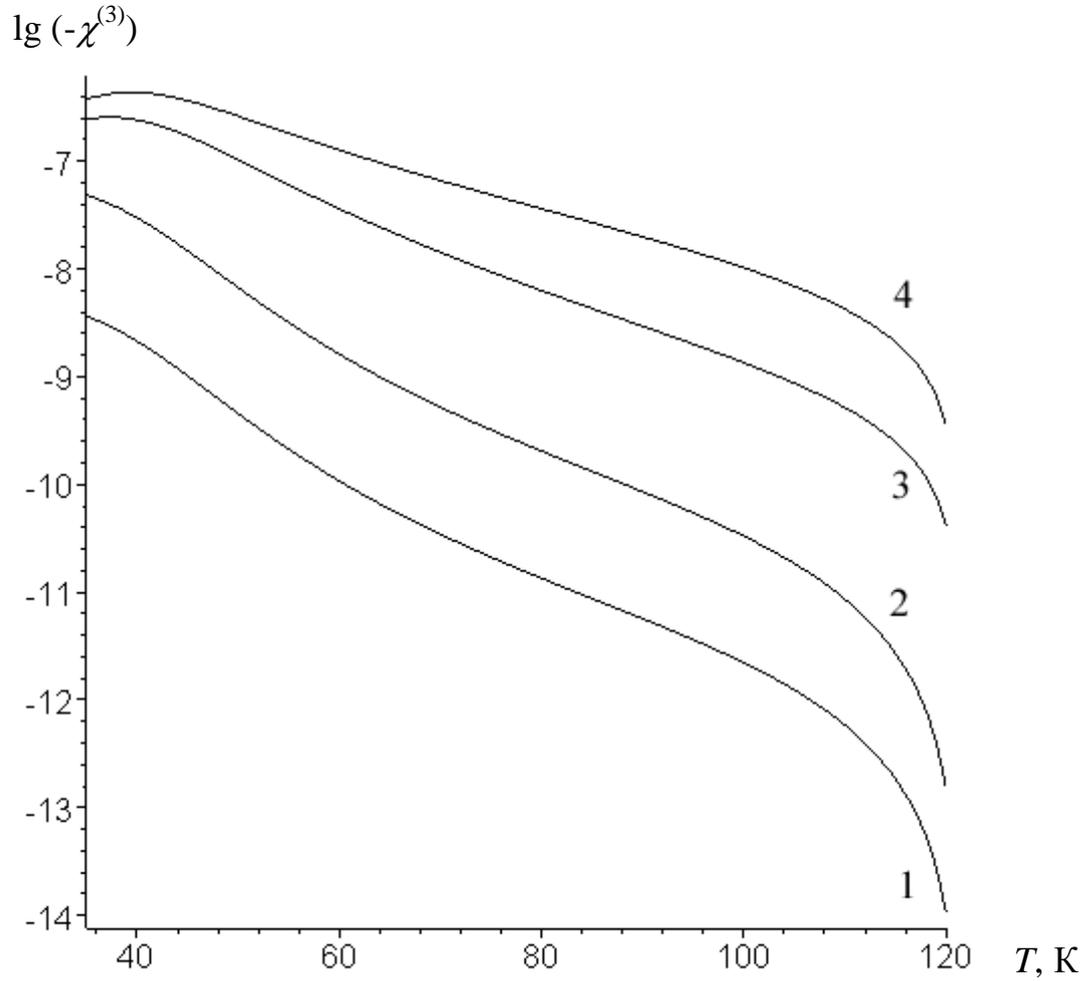


Рис. 1.10. Температурная зависимость $\chi^{(3)}$ для GaAs. 1 – $\lambda = 2\,000$ мкм, $N = 10^{15}$ см $^{-3}$, 2 – $\lambda = 4\,000$ мкм, $N = 10^{15}$ см $^{-3}$, 3 – $\lambda = 2\,000$ мкм, $N = 10^{16}$ см $^{-3}$, 4 – $\lambda = 4\,000$ мкм, $N = 10^{16}$ см $^{-3}$.

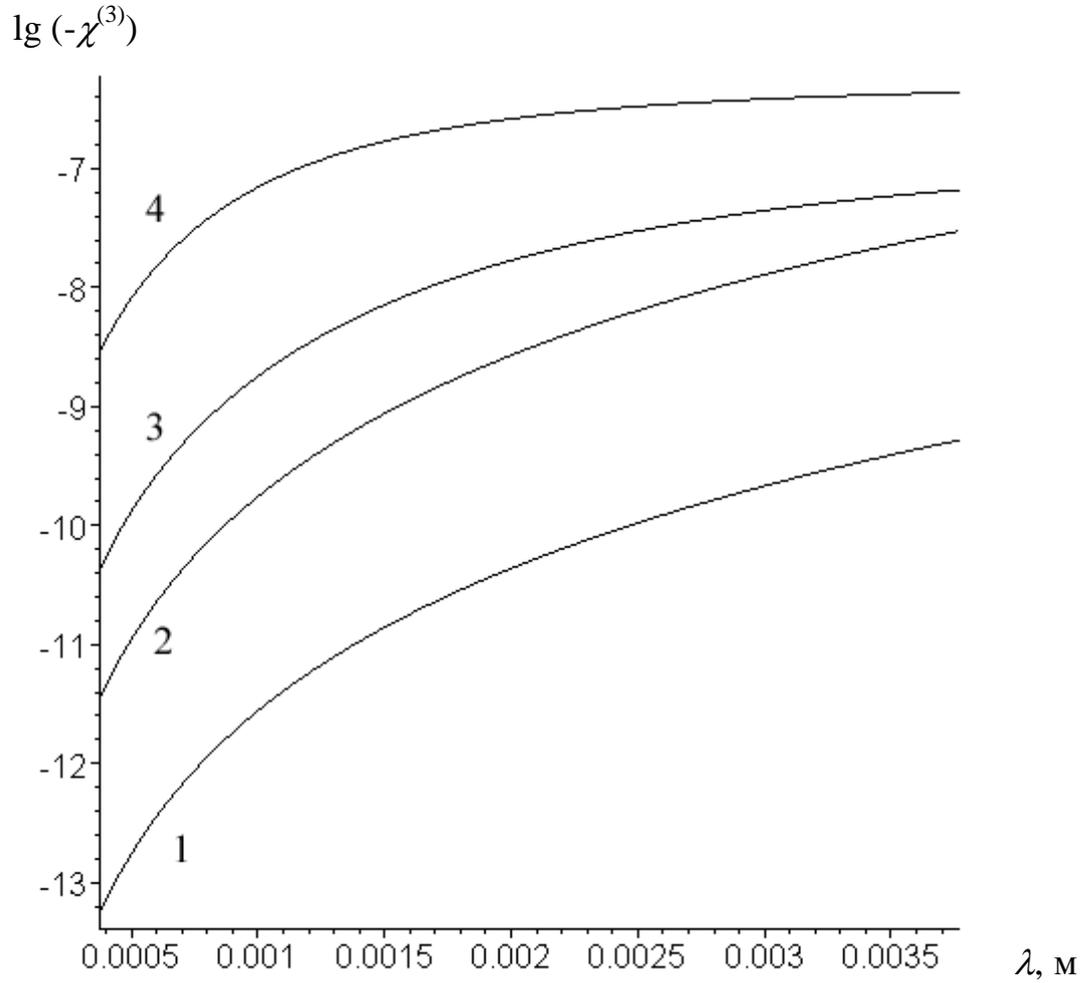


Рис. 1.11. Зависимость $\chi^{(3)}$ от длины волны для GaAs. 1 – $T = 70$ К, $N = 10^{15}$ см^{-3} , 2 – $T = 40$ К, $N = 10^{15}$ см^{-3} , 3 – $T = 70$ К, $N = 10^{16}$ см^{-3} , 4 – $T = 40$ К, $N = 10^{16}$ см^{-3} .

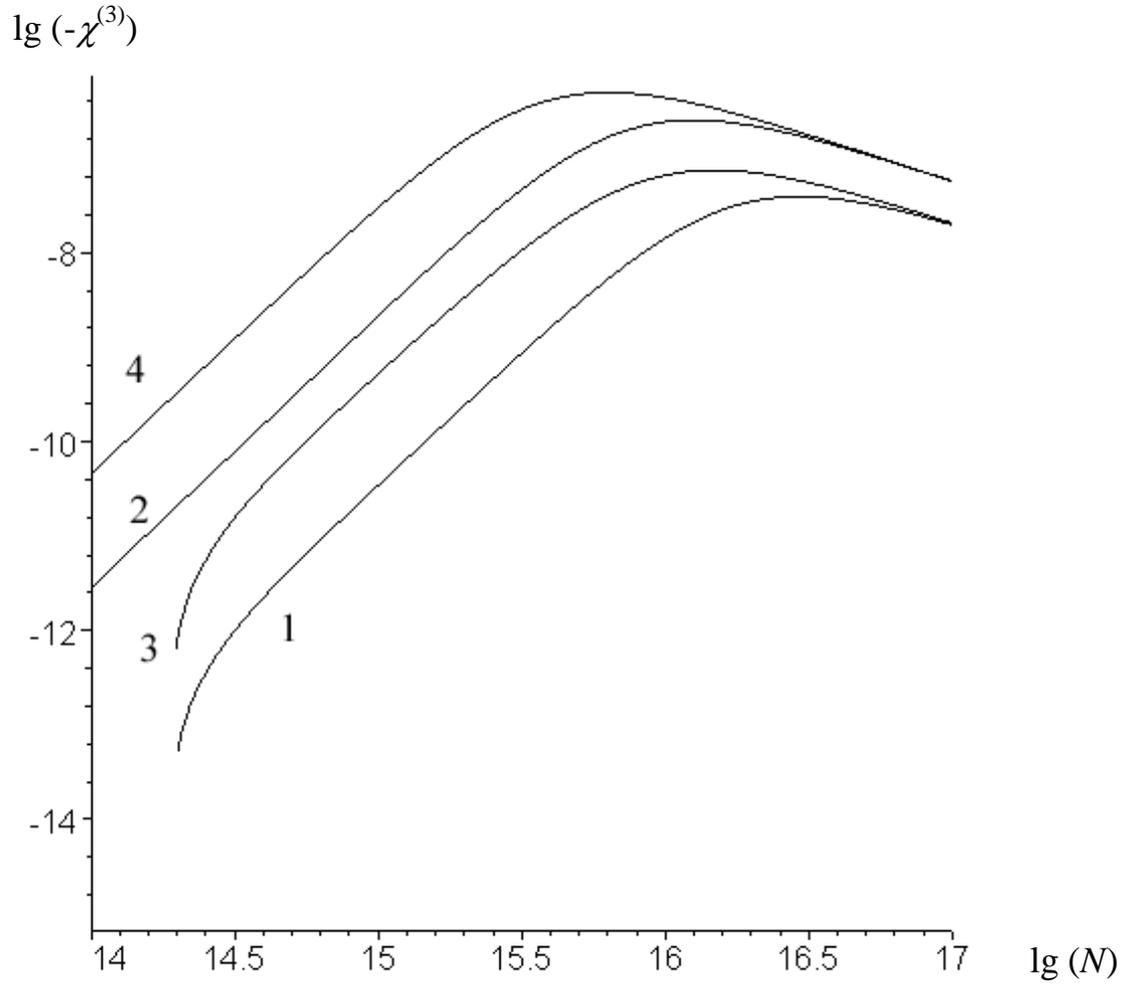


Рис. 1.12. Концентрационная зависимость $\chi^{(3)}$ для GaAs. 1 – $T = 70$ К, $\lambda = 2\,000$ мкм, 2 – $T = 40$ К, $\lambda = 2\,000$ мкм, 3 – $T = 70$ К, $\lambda = 4\,000$ мкм, 4 – $T = 40$ К, $\lambda = 4\,000$ мкм.

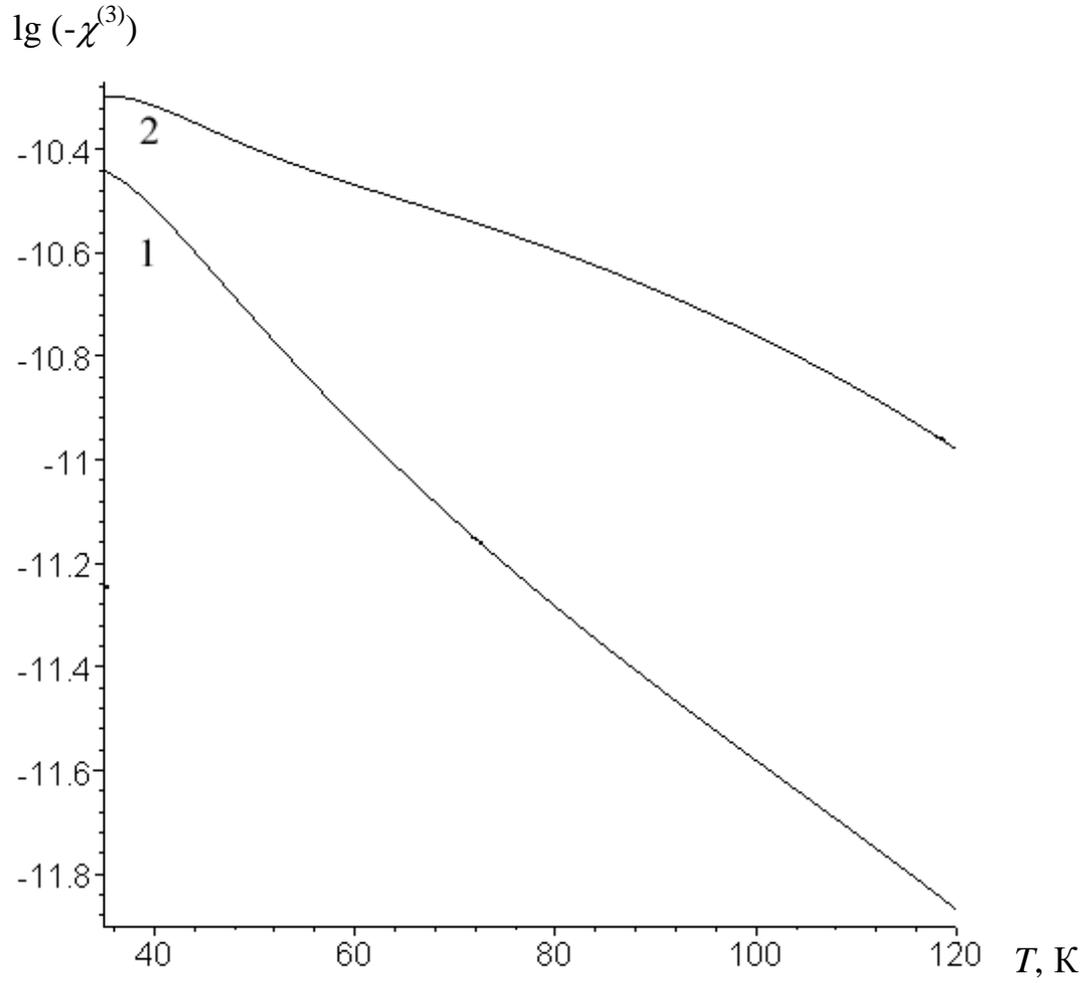


Рис. 1.13. Температурная зависимость $\chi^{(3)}$ для InAs. 1 – $\lambda = 2\,000$ мкм, $N = 10^{15}$ см $^{-3}$, 2 – $\lambda = 4\,000$ мкм, $N = 10^{15}$ см $^{-3}$.

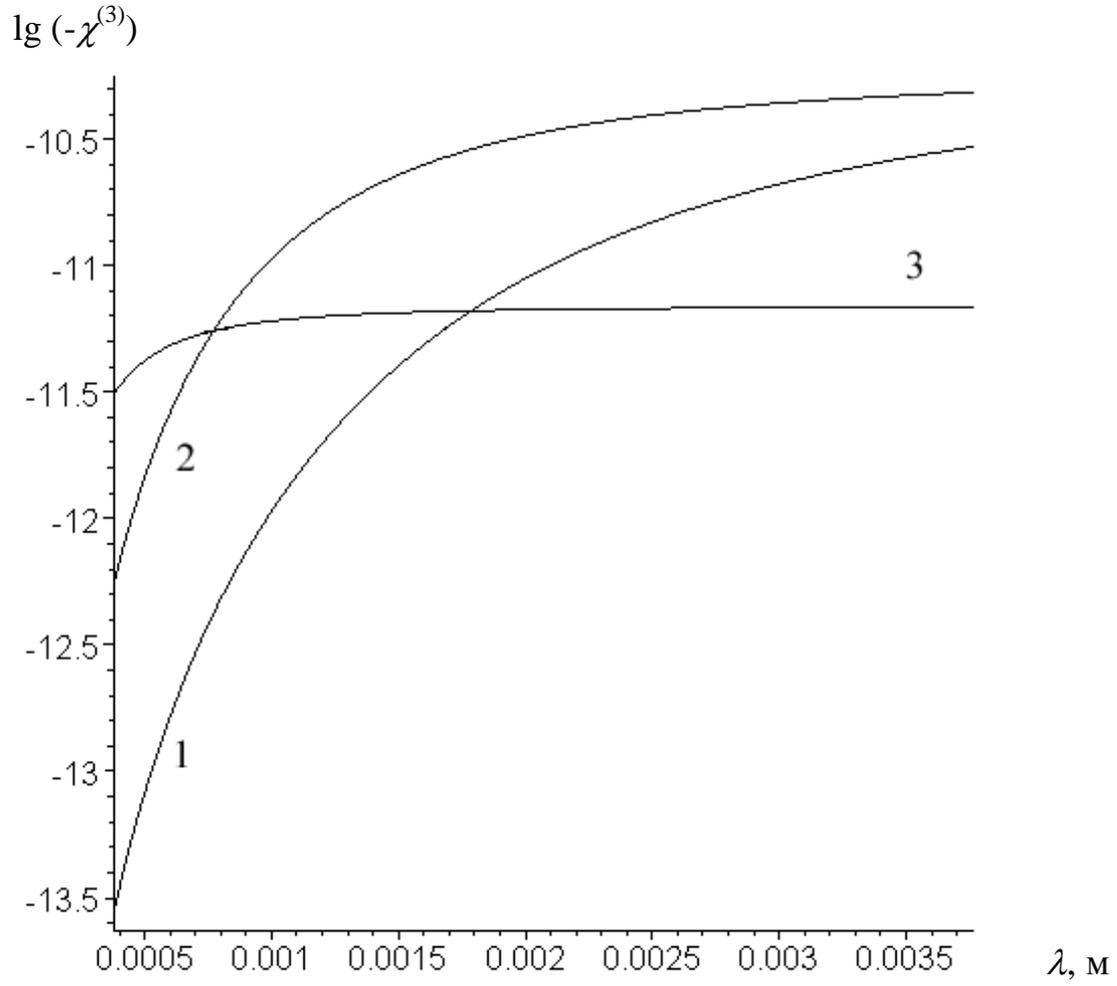


Рис. 1.14. Зависимость $\chi^{(3)}$ от длины волны для InAs. 1 – $T = 70$ К, $N = 10^{15}$ см^{-3} , 2 – $T = 40$ К, $N = 10^{15}$ см^{-3} , 3 – $T = 70$ К, $N = 10^{16}$ см^{-3} .

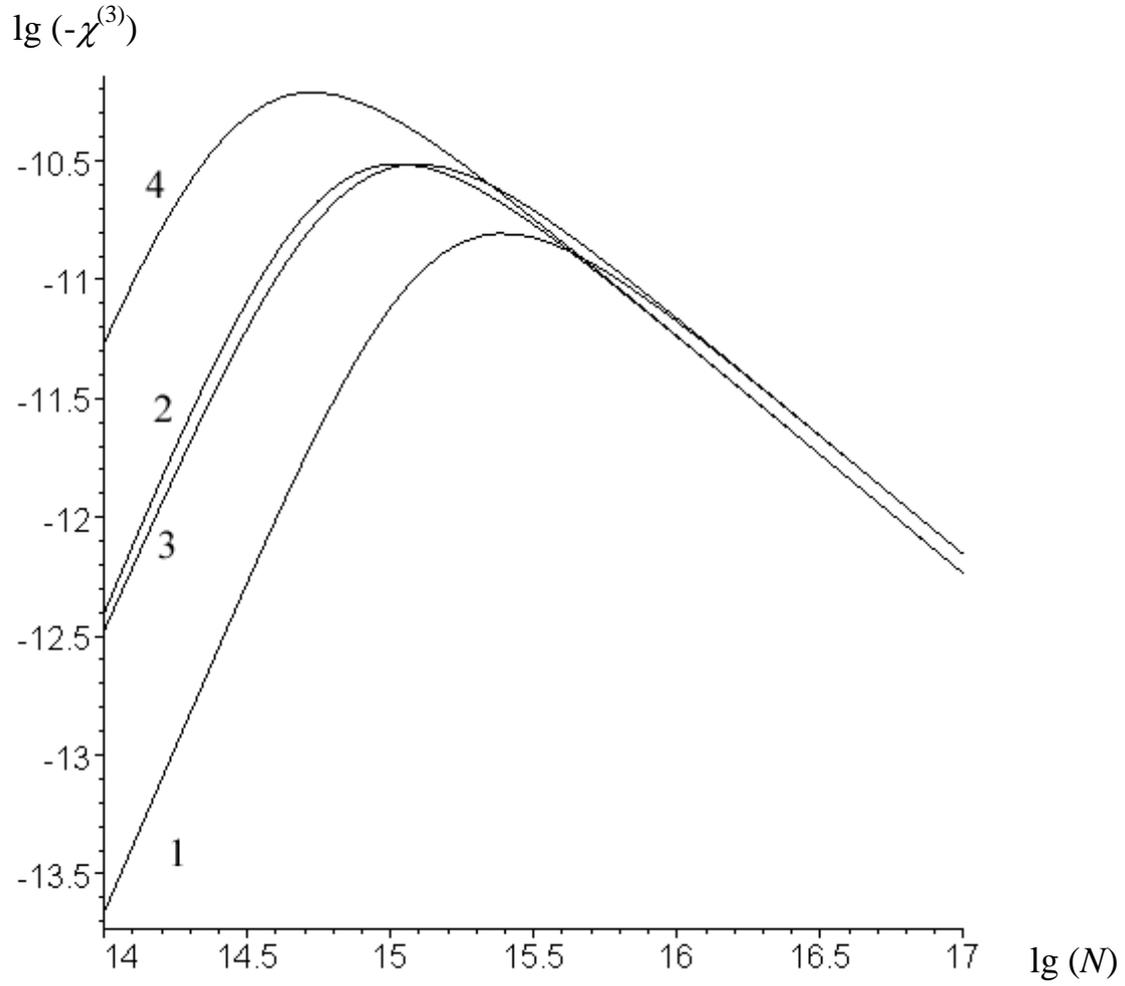


Рис. 1.15. Концентрационная зависимость $\chi^{(3)}$ для InAs. 1 – $T = 70$ К, $\lambda = 2\,000$ мкм, 2 – $T = 40$ К, $\lambda = 2\,000$ мкм, 3 – $T = 70$ К, $\lambda = 4\,000$ мкм, 4 – $T = 40$ К, $\lambda = 4\,000$ мкм.

1.8.5 Фосфид индия

Полученные зависимости абсолютной величины $\chi^{(3)}$ от температуры и длины волны для фосфида индия (рис. 1.16, 1.17) в значительной степени совпадают с соответствующими кривыми для арсенида галлия (рис. 1.10, 1.11). Концентрационная же зависимость нелинейной восприимчивости (рис. 1.18) имеет существенное отличие от полученной для других полупроводников. Насыщение наступает так же, как для арсенида галлия и арсенида индия, при значениях концентрации примесей порядка $10^{15} - 10^{16} \text{ см}^{-3}$, однако максимум не достигается, и медленный рост нелинейности продолжается вплоть до верхней границы рассматриваемого концентрационного диапазона (10^{17} см^{-3}).

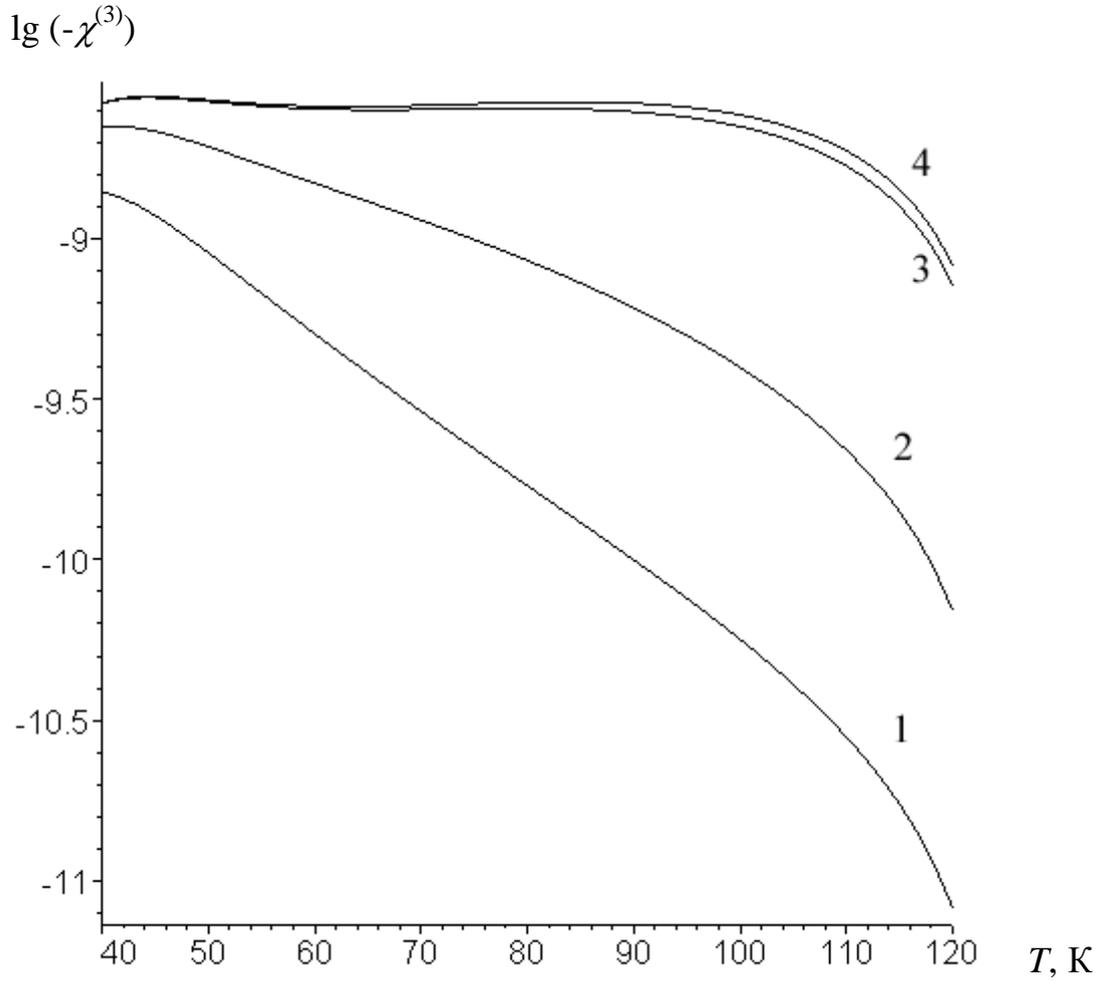


Рис. 1.16. Температурная зависимость $\chi^{(3)}$ для InP. 1 – $\lambda = 2\,000$ мкм, $N = 10^{15}$ см $^{-3}$, 2 – $\lambda = 4\,000$ мкм, $N = 10^{15}$ см $^{-3}$, 3 – $\lambda = 2\,000$ мкм, $N = 10^{16}$ см $^{-3}$, 4 – $\lambda = 4\,000$ мкм, $N = 10^{16}$ см $^{-3}$.

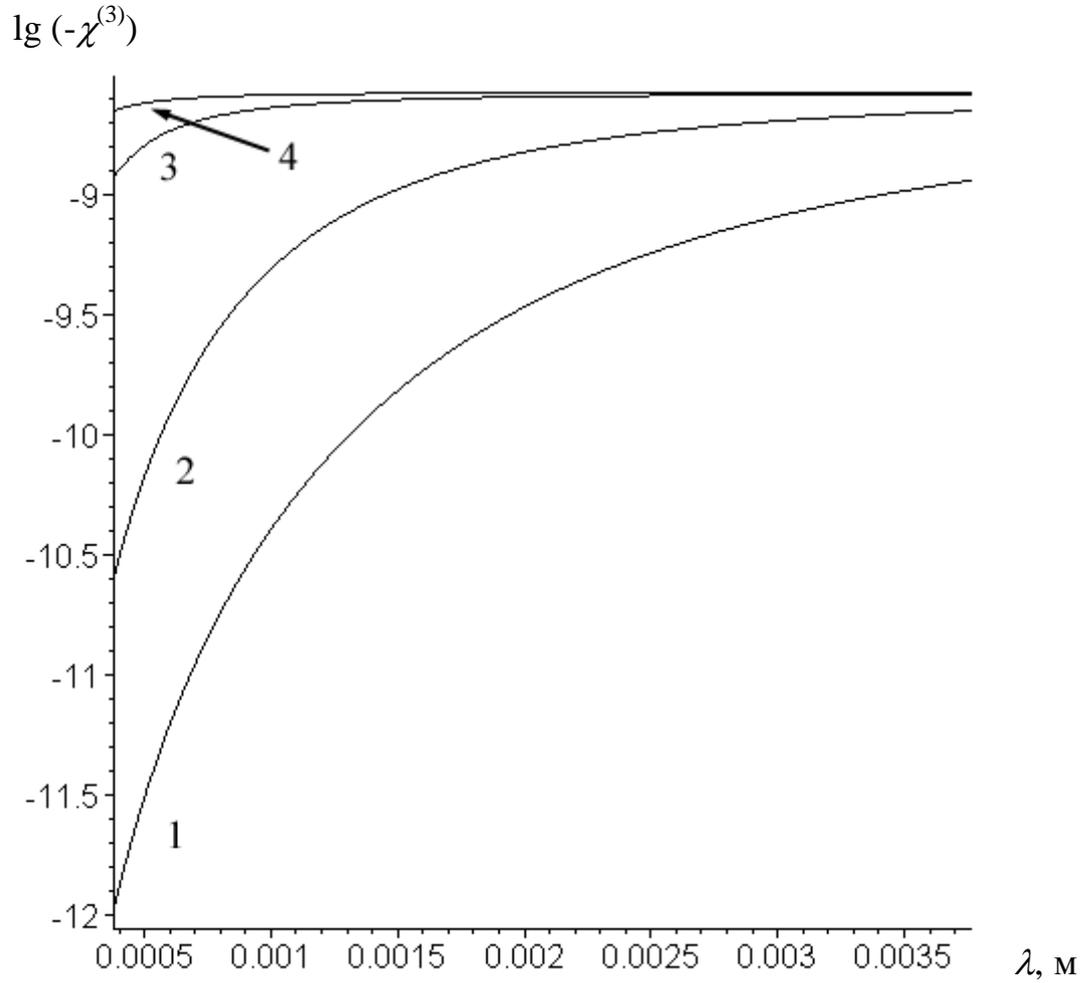


Рис. 1.17. Зависимость $\chi^{(3)}$ от длины волны для InP. 1 – $T = 70$ К, $N = 10^{15}$ см $^{-3}$,
 2 – $T = 40$ К, $N = 10^{15}$ см $^{-3}$, 3 – $T = 70$ К, $N = 10^{16}$ см $^{-3}$, 4 – $T = 40$ К, $N = 10^{16}$ см $^{-3}$.

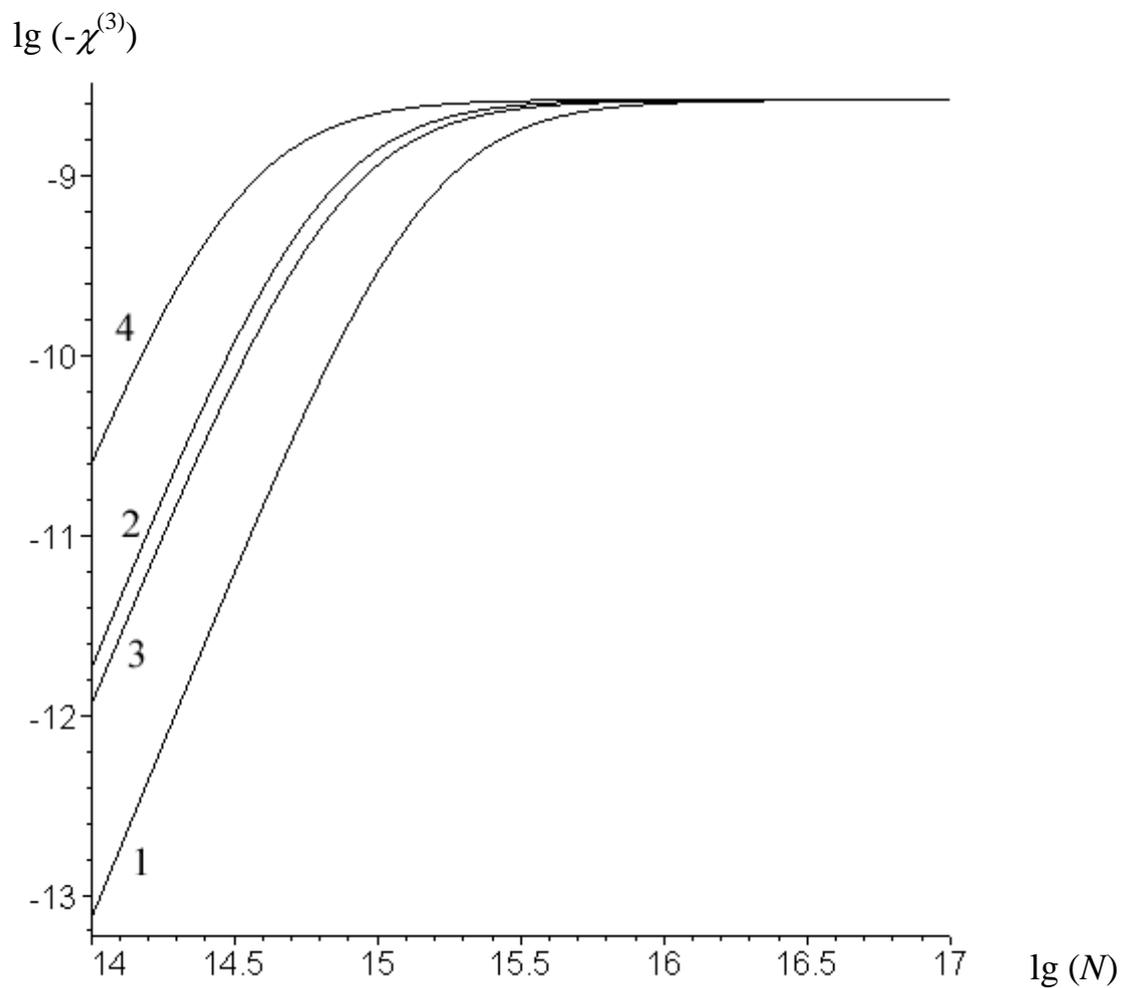


Рис. 1.18. Концентрационная зависимость $\chi^{(3)}$ для InP. 1 – $T = 70$ К, $\lambda = 2\,000$ мкм, 2 – $T = 40$ К, $\lambda = 2\,000$ мкм, 3 – $T = 70$ К, $\lambda = 4\,000$ мкм, 4 – $T = 40$ К, $\lambda = 4\,000$ мкм.

1.9 Генерация третьей гармоники при отражении излучения от поверхности полупроводника

Как известно, при падении электромагнитной волны на границу нелинейной среды происходит отражение излучения не только на исходной частоте, но и на кратных частотах [1]. Для каждой из гармоник амплитуда отраженного излучения пропорциональна восприимчивости соответствующего порядка. Так, для третьей гармоники она пропорциональна величине $\chi^{(3)}$, температурная, частотная и концентрационная зависимости для которой получены в данной главе. Напряженность E_{3R} поля отраженной третьей гармоники частоты ω_3 в случае нормального падения излучения может быть рассчитана с помощью выражения [3]:

$$E_{3R} = \frac{1}{k_{3T} + k_{3R}} \left[(k_{3R} - k_{3T}) E_{3I} + \frac{k_{3T} - k_{3S}}{c^2 (k_{3S}^2 - k_{3T}^2)} 4\pi\omega_3^2 \chi^{(3)} E^3 \right], \quad (1.11)$$

где k_{3R} – волновой вектор третьей гармоники вне среды, k_{3T} и k_{3S} – волновые векторы преломленной и сгенерированной третьей гармоники в среде, E_{3I} – напряженность поля падающей третьей гармоники, E – напряженность поля падающего излучения основной частоты. Если в исходном излучении отсутствует волна с частотой третьей гармоники, выражение (1.11) сводится к:

$$E_{3R} = \left| \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon} + 1)} \chi^{(3)} \right| E^3 = R_3 \cdot E^3,$$

где $\sqrt{\varepsilon}$ – показатель преломления среды, $R_3 = \left| \frac{4\pi}{\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon} + 1)} \chi^{(3)} \right|$ – коэффициент пропорциональности между напряженностью поля третьей гармоники и кубом амплитуды падающего излучения. На рис. 1.19 приведена зависимость величины R_3 от длины волны для GaAs. Поскольку коэффициент R_3 фактически пропорционален нелинейной восприимчивости третьего порядка $\chi^{(3)}$, зависимость, показанная на рис. 1.19, имеет тот же характер, что и зависимость $\chi^{(3)}$ от длины волны (рис. 1.11). Вследствие этого приведение графиков остальных зависимостей представляется излишним.

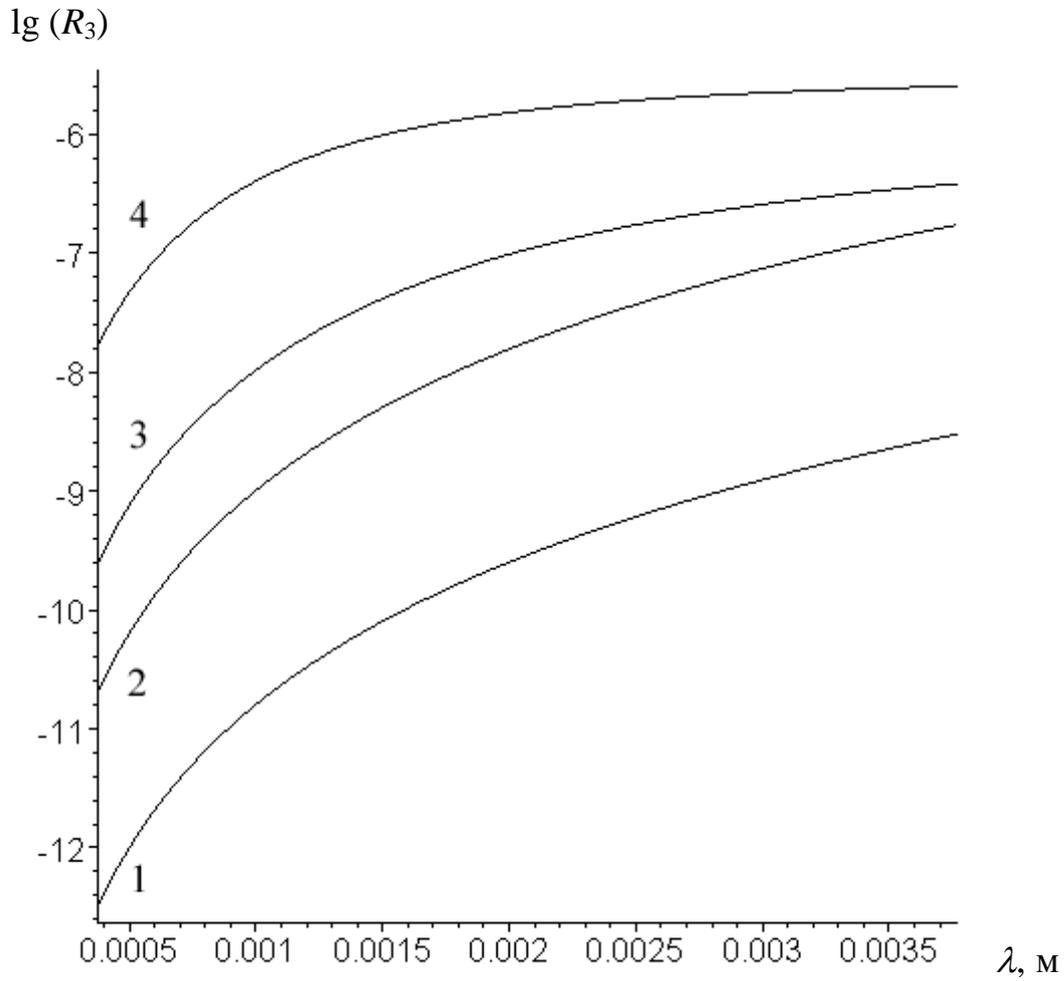


Рис. 1.19. Зависимость R_3 от длины волны для GaAs. 1 – $T = 70$ К, $N = 10^{15}$ см $^{-3}$, 2 – $T = 40$ К, $N = 10^{15}$ см $^{-3}$, 3 – $T = 70$ К, $N = 10^{16}$ см $^{-3}$, 4 – $T = 40$ К, $N = 10^{16}$ см $^{-3}$.

1.10 Основные результаты главы 1

Отметим в заключение основные результаты, полученные в первой главе.

- Разработан метод расчета нелинейных восприимчивостей полупроводников в миллиметровом и субмиллиметровом диапазоне.
- Определены основные механизмы рассеяния носителей, определяющие нелинейные свойства полупроводников АШВV в этом диапазоне.
- Получены зависимости нелинейных восприимчивостей для ряда полупроводников (GaAs, InAs, InP) от температуры решетки, длины волны падающего излучения и концентрации ионизированных примесей.
- Рассчитана напряженность поля отраженной третьей гармоники.

Глава 2

Временное представление взаимодействия коротких несинусоидальных импульсов с плазмоподобной средой

2.1 Отражение и преломление коротких импульсов на границе плазмоподобной среды (решение во временной области)

Плазмоподобные среды характеризуются сильным откликом на изменения внешнего электромагнитного поля, действующего на них, что объясняется наличием в них значительного количества свободных носителей заряда. Поскольку носители имеют конечную массу, отклик среды на такие изменения является инерционным. В случае, когда установление поля происходит достаточно медленно и изменение среды успевает следовать за изменениями поля (например, при воздействии длительных импульсов), отражательные и дисперсионные свойства среды определяются достаточно легко. Так, при взаимодействии длительного квазимонохроматического импульса со средой в большинстве случаев можно считать среду стационарной и рассчитывать изменение формы импульса, используя не зависящий от времени закон дисперсии. С сокращением длительности импульса и приближением ее к характерному времени отклика среды такой подход перестает работать. Кроме того, короткие импульсы, как правило, являются ангармоническими, их огибающая содержит лишь одно или несколько колебаний электромагнитного поля, их передний и задний фронты несимметричны, а расстояния между точками пересечения нуля не равны между собой. Все это существенно усложняет рассмотрение таких импульсов традиционными методами.

Основной особенностью взаимодействия коротких несинусоидальных импульсов с плазмоподобными средами является то, что их фронт претерпевает весьма существенное искажение как при отражении от среды, так и при проникновении вглубь нее. Короткими в данном случае считаются

импульсы, обратная характерная продолжительность которых сравнима с плазменной частотой среды, то есть

$$\left(\frac{1}{t_0} \sim \Omega \right), \quad (2.1)$$

Рассмотрим математическую модель взаимодействия электромагнитного поля с плазмподобной средой. В таких средах ток \vec{j} , вызванный воздействием внешнего электромагнитного поля, можно выразить через элементарный заряд e , скорость \vec{v} носителей заряда и их концентрацию N :

$$\vec{j} = eN\vec{v}.$$

Изменение тока \vec{j} с течением времени определяется равенством:

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{\Omega^2 \vec{E}}{4\pi},$$

где плазменная частота

$$\Omega = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}},$$

m – масса носителя заряда. Рассмотрим поляризованное электромагнитное поле и введем прямоугольную декартову систему координат (x, y, z) , в которой электрическая E_x и магнитная H_y составляющие поля изменяются вдоль осей x и y соответственно, а направление его распространения совпадает с осью z .

Выразим компоненты E_x и H_y через вектор-потенциал $\vec{A}(A_x, 0, 0)$ следующим образом:

$$E_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

$$H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}.$$

При использовании этого представления система уравнений Максвелла

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0,$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0,$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \int_{-\infty}^t \vec{j}(t_1) dt_1$$

может быть сведена к одному уравнению:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = \frac{\Omega^2}{c^2} A_x. \quad (2.2)$$

Получив решение этого уравнения, можно определить координатную и временную зависимость величины поля в среде и тем самым установить ее отражательные и дисперсионные свойства.

2.2 Традиционные методы решения задачи

Традиционные методы решения задач исследования взаимодействия импульсов со средой основаны на нахождении семейства гармонических решений уравнения (2.2) вида

$$A_x = A_0 \exp[i(kz - \omega t)], \quad (2.3)$$

где k – волновое число, ω – частота гармоники. Они связаны между собой дисперсионным соотношением

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \Omega^2,$$

вытекающим также из уравнения (2.2).

Отметим, однако, что в случае, когда выполнено условие (2.1), такое представление вследствие сложной формы импульса приводит к рассмотрению весьма широкого спектра гармоник. При этом коэффициенты отражения этих гармоник могут весьма существенно различаться, чем и объясняется заметное искажение формы импульса при его взаимодействии с плазмopodobной средой.

Существуют многочисленные реализации методов расчета отраженного и проникающего в среду импульса, основанные на использовании преобразования Фурье, оптимизированные для различных задач подобного рода, хорошо зарекомендовавшие себя при рассмотрении квазимонохроматических импульсов. Однако в рассматриваемом случае такие методы, как правило, оказываются неэффективными, а в ряде случаев и неприменимыми.

При использовании преобразования Фурье огибающая импульса интегрируется по бесконечному интервалу времени, вследствие чего при применении численных методов участки быстрого изменения огибающей, характерные для коротких импульсов, могут выпасть из рассмотрения. При восстановлении же временной огибающей требуется, как отмечалось выше, учет большого числа гармоник. Кроме того, деформация импульса в

диспергирующей среде описывается при помощи разложения фазы колебаний в ряд по степеням отношения спектральной ширины импульса $\Delta\omega$ к несущей частоте ω , а это отношение для коротких широкополосных импульсов не является малым параметром. Это также существенно увеличивает количество рассматриваемых спектральных компонент и порождая вычислительные трудности [20].

Эти проблемы затрудняют, но, вообще говоря, не делают невозможным применение преобразования Фурье. Однако, вследствие большой ширины получающегося спектра, оказывается весьма вероятным появление в нем частоты отсечки диспергирующей прозрачной среды, которой соответствует показатель преломления, равный нулю. Поскольку при разложении фазы волны по степеням отношения $\Delta\omega/\omega$ все слагаемые содержат в знаменателе этот коэффициент, соответствующий ряд будет расходиться, и метод преобразования Фурье в этом случае будет неприменим в принципе.

2.3 Метод неразделяющихся решений

Наряду с рассмотренным выше семейством гармонических решений уравнения

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = \frac{\Omega^2}{c^2} A_x \quad (2.4)$$

существует также набор его точных неразделяющихся несинусоидальных решений, метод нахождения которых предложен в [21]. Эти решения могут служить основой для реализации временного подхода к рассмотрению взаимодействия коротких импульсов с плазменными средами.

Проведем замену переменных, нормировав временную и пространственную координаты:

$$\tau = \Omega t ,$$

$$\eta = \frac{\Omega z}{c} ,$$

и введя безразмерную функцию f :

$$f = \frac{A_x}{A_0} ,$$

где A_0 - нормировочный коэффициент. При этом уравнение (2.4) приводится в безразмерную форму и принимает вид:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} = f .$$

Это выражение известно как уравнение Клейна-Гордона [59]. В [60] описаны решения этого уравнения, представленные в виде:

$$f = \sum_{q=q_0}^{\infty} d_q f_q(\tau, \eta) ,$$

$$f_q(\tau, \eta) = \frac{1}{2} (\Psi_{q-1}(\tau, \eta) - \Psi_{q+1}(\tau, \eta)) ,$$

$$\Psi_q(\tau, \eta) = \left(\frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^{q/2} J_q(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}).$$

Здесь J_q - функция Бесселя порядка q . Применяя рекуррентные формулы для производных функций $\Psi_q(\tau, \eta)$ по переменным τ и η :

$$\frac{\partial \Psi_q}{\partial \tau} = \frac{1}{2} (\Psi_{q-1} - \Psi_{q+1}),$$

$$\frac{\partial \Psi_q}{\partial \eta} = -\frac{1}{2} (\Psi_{q-1} + \Psi_{q+1}),$$

можно получить выражения для электрической и магнитной компонент поля внутри среды:

$$E_x(\tau, \eta) = -\frac{A_0 \Omega}{c} \sum_{q=3}^{\infty} d_q e_q(\tau, \eta), \quad (2.5)$$

$$e_q(\tau, \eta) = \frac{1}{4} (\Psi_{q-2} - 2\Psi_q + \Psi_{q+2}),$$

$$H_y(\tau, \eta) = -\frac{A_0 \Omega}{c} \sum_{q=3}^{\infty} d_q h_q(\tau, \eta),$$

$$h_q(\tau, \eta) = \frac{1}{4} (\Psi_{q-2} - \Psi_{q+2}).$$

Значения коэффициентов d_q находятся из условий непрерывности электромагнитного поля на границе среды ($\eta = 0$), которые рассматриваются ниже. В выражениях (2.5) суммирование начинается с $q_0 = 3$, что соответствует наиболее общему случаю, когда поле вблизи фронта растет со временем линейно; для импульсов с более плавным ростом фронта в начале волны суммирование может начинаться с $q_0 = 4, 5$ и т. д.

Введем новые переменные α и x следующим образом:

$$\alpha = \Omega t_0,$$

$$x = t_0^{-1} t$$

и обозначим электрическую и магнитную компоненты исходного импульса как $E(x)$ и $H(x)$ соответственно, а отраженного - $E_r(x)$ и $H_r(x)$. Тогда условия непрерывности будут выглядеть как:

$$E(x) + E_r(x) = -\frac{A_0 \Omega}{c} \sum_{q=3}^{\infty} \frac{1}{4} d_q (J_{q-2}(\alpha x) - 2J_q(\alpha x) + J_{q+2}(\alpha x)), \quad (2.6)$$

$$H(x) + H_r(x) = -\frac{A_0 \Omega}{c} \sum_{q=3}^{\infty} \frac{1}{4} d_q (J_{q-2}(\alpha x) - J_{q+2}(\alpha x)).$$

Короткие электромагнитные импульсы, генерируемые используемыми на практике источниками излучения, имеют, как отмечалось выше, достаточно сильно отличающуюся от синусоиды асимметричную форму с неравными промежутками между нулевыми значениями составляющих. Поэтому представляется более удобным использовать для разложения исходного и отраженного от границы среды импульсов базис, форма компонент которого лучше соответствует форме рассматриваемых импульсов, нежели обыкновенно применяемый тригонометрический. В качестве такого базиса можно, в частности, рассматривать систему функций Лягерра [15]:

$$L_n(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x^n e^{-x}), \quad n = 0.. \infty$$

Эта система является полной и ортонормированной на промежутке $[0, +\infty)$. Примеры первых трех функций Лягерра приведены на рис. 2.1.

Пусть разложение исходного импульса по функциям Лягерра записывается как

$$E(x) = H(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i L_i(x),$$

а отраженного – как

$$E_r(x) = -H_r(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i L_i(x). \quad (2.7)$$

Подстановкой этих выражений в (2.6) получим следующую систему граничных условий:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i L_i(x) + \sum_{i=0}^{\infty} b_i L_i(x) = -\frac{A_0 \Omega}{c} \sum_{q=3}^{\infty} \frac{1}{4} d_q (J_{q-2}(\alpha x) - 2J_q(\alpha x) + J_{q+2}(\alpha x)),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i L_i(x) - \sum_{i=0}^{\infty} b_i L_i(x) = -\frac{A_0 \Omega}{c} \sum_{q=3}^{\infty} \frac{1}{4} d_q (J_{q-2}(\alpha x) - J_{q+2}(\alpha x)).$$

Умножение обеих частей этих равенств на каждый из полиномов Лягерра с последующим их интегрированием по переменной x по промежутку $[0, +\infty)$ дает бесконечную систему линейных уравнений относительно переменных b_n и d_q :

$$a_n + b_n = -\frac{A_0 \Omega}{c} \sum_{q=3}^{\infty} \frac{1}{4} d_q \int_0^{\infty} L_n(x) (J_{q-2}(\alpha x) - 2J_q(\alpha x) + J_{q+2}(\alpha x)) dx, \quad (2.8)$$

$$a_n - b_n = -\frac{A_0 \Omega}{c} \sum_{q=3}^{\infty} \frac{1}{4} d_q \int_0^{\infty} L_n(x) (J_{q-2}(\alpha x) - J_{q+2}(\alpha x)) dx.$$

Выбрав подсистему достаточной размерности и решив ее, можно получить значения коэффициентов b_n и d_q со сколь угодно высокой точностью. Критерием точности решения может служить как сходимость суммы коэффициентов b_n к нулю (это условие возникает вследствие того, что электрическая и магнитная составляющие импульса в начальный момент времени равны нулю, а $L_n(0) = 1$ для всех значений n), так и устойчивость получаемых значений b_n и d_q с ростом размерности решаемой системы. При этом следует учитывать, что если в разложении исходного импульса некоторый коэффициент $a_n = 0$, соответствующее ему значение b_n может отличаться от нуля. Интегралы в правых частях уравнений (2.8) удобно вычислять с помощью формулы [61]:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} J_q(\Omega t) dt = \frac{\Omega^q}{\sqrt{p^2 + \Omega^2} (p + \sqrt{p^2 + \Omega^2})^q}.$$

Также следует отметить, что коэффициент b_0 вычисляется точно при любом ранге решаемой системы:

$$b_0 = -\frac{4a_0\alpha^2}{(1 + \sqrt{1 + 4\alpha^2})^2}.$$

Таким образом, выражения (2.5) и (2.7) полностью описывают прошедший в глубь среды и отраженный импульсы.

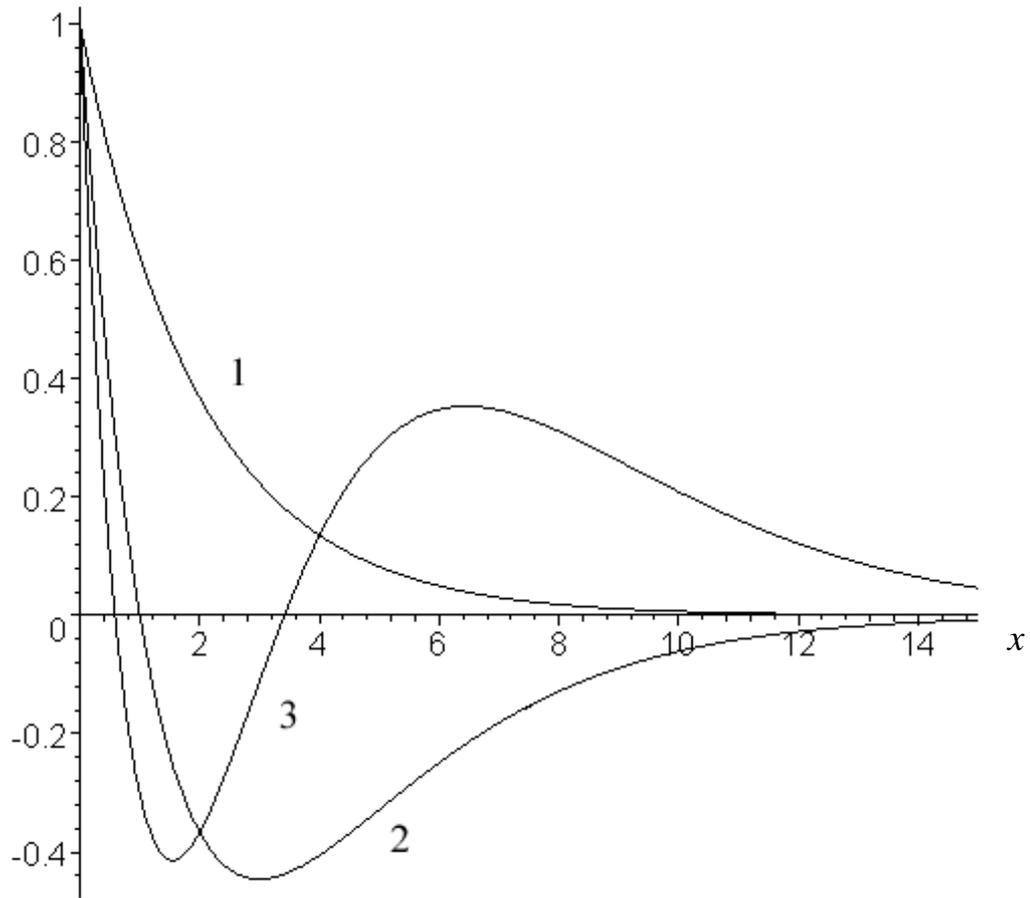


Рис. 2.1. Функции Лягерра. 1 – $L_0(x)$, 2 – $L_1(x)$, 3 – $L_2(x)$.

2.4 Численный метод

Расчеты, проведенные для различных значений параметра α , характеризующего соотношение продолжительности импульса и плазменной частоты среды, показали, что рассмотренный выше метод хорошо практически применим для импульсов, представимых в виде суммы первых нескольких полиномов Лягерра и малых значений α ($\alpha < 1$), которым соответствуют короткие импульсы простой формы и разреженная плазма. При рассмотрении больших α и полиномов Лягерра высокого порядка, то есть достаточно длительных и медленно затухающих импульсов, взаимодействующих с плотной плазмой, этот метод требует решения систем большой размерности. Для того чтобы уменьшить сложность соответствующих расчетов, предлагается следующий численный метод.

Выберем Q моментов времени x_1, \dots, x_Q . Подставляя в граничные условия (2.6) значения $x_i, i = 1, \dots, Q$, и введя для получения более компактной записи следующие переменные:

$$u_i = E(x_i),$$

$$v_i = E_r(x_i)$$

получим систему, состоящую из $2Q$ уравнений:

$$u_i + v_i = -\frac{A_0 \Omega}{c} \sum_{q=3}^{Q+2} \frac{1}{4} d_q (J_{q-2}(\alpha x_i) - 2J_q(\alpha x_i) + J_{q+2}(\alpha x_i)), \quad (2.9)$$

$$u_i - v_i = -\frac{A_0 \Omega}{c} \sum_{q=3}^{Q+2} \frac{1}{4} d_q (J_{q-2}(\alpha x_i) - J_{q+2}(\alpha x_i)),$$

которая попарным сложением уравнений легко сводится к системе из Q уравнений. Здесь параметры u_i соответствуют исходному импульсу, следовательно, их значения известны, а v_i и d_q являются неизвестными системы.

Выражение для отраженного импульса, в котором участвуют только коэффициенты d_q , при этом выглядит следующим образом:

$$E_r(x) = -E(x) - \frac{A_0 \Omega}{c} \sum_{q=3}^{Q+2} \frac{1}{4} d_q (J_{q-2}(\alpha x) - 2J_q(\alpha x) + J_{q+2}(\alpha x)),$$

$$H_r(x) = -H(x) - \frac{A_0 \Omega}{c} \sum_{q=3}^{Q+2} \frac{1}{4} d_q (J_{q-2}(\alpha x) - J_{q+2}(\alpha x)).$$

Это выражение имеет сложную форму записи, особенно при больших значениях Q , что делает неудобным его применение на практике. Учитывая, что отраженный импульс является гладкой функцией времени, можно получить его более компактное и удобное для последующего использования представление, используя набор значений v_i , которые также можно получить из системы (2.9). Такое представление можно получить проведя интерполирование отраженного импульса по полученным значениям v_i , например, полиномами или сплайнами.

Критерием выбора значения Q в этом методе является устойчивость получаемых значений d_q . Вообще говоря, при рассмотрении импульсов очень сложной формы подбором моментов времени x_i , учитывающим особенности исследуемого импульса, можно несколько уменьшить требуемое количество уравнений, но в большинстве случаев можно ограничиться простейшим вариантом равномерного разбиения.

Сравнение аналитического и численного методов показало, что для малых значениях параметра α ($\alpha < 1$), которые соответствуют разреженной плазме или коротким импульсам, выгоднее пользоваться аналитическим методом, поскольку он быстрее дает более точное приближение для отраженного импульса с увеличением размерности системы. При более высоких значениях α , соответствующих длинным импульсам и плотной плазме, удобнее второй, численный, метод, имеющий меньшую вычислительную сложность.

2.5 Отраженный и проходящий импульсы при различных значениях параметра α

Расчет отраженного импульса проводился для ряда значений параметра α из промежутка от 0.5 до 5.0 и различных форм исходного импульса. Приведем в качестве примера несколько наиболее характерных графиков, иллюстрирующих особенности отражения импульсов. На рис. 2.2 – 2.4 показаны профили отраженных импульсов при разных значениях α для исходного импульса вида

$$E(x) = L_0(x) - L_1(x),$$

профиль которого не пересекает ось абсцисс; на рис. 2.5 – 2.7 – для исходного импульса вида

$$E(x) = L_0(x) - L_2(x),$$

профиль которого имеет пересечение с осью абсцисс.

На рис. 2.2 показан отраженный импульс для значения параметра $\alpha = 0.5$, то есть для случая, когда обратная характерная продолжительность исходного импульса в два раза меньше плазменной частоты среды. Как видно из рисунка, исходный импульс при отражении претерпевает существенное искажение и, следовательно, частично проникает внутрь среды.

В случае, когда обратная характерная продолжительность исходного импульса сравнима с плазменной частоты среды ($\alpha = 1.0$, рис. 2.3), искажение отраженного импульса существенно меньше. С дальнейшим ростом параметра α , то есть с увеличением длительности импульса или плотности плазмы, искажение продолжает уменьшаться, и к $\alpha = 1.5$ (рис. 2.4) отражение становится практически полным. Дальнейшее увеличение значения параметра α не приводит к сколько-нибудь заметному изменению картины.

Для импульсов более сложной формы (рис. 2.5 – 2.7) сохраняется та же тенденция, следует лишь отметить, что изменение формы отраженного импульса с ростом α происходит в этом случае несколько медленнее [62].

На рис. 2.8 – 2.13 показана временная зависимость электрической и магнитной компонент поля внутри среды в координатах (τ, η) . Рис. 2.8 – 2.9 соответствуют $\eta = 0$, то есть, границе среды, рис. 2.10 – 2.11 – $\eta = 2$, а рис. 2.10 – 2.11 – $\eta = 10$, то есть, точке, расположенной достаточно глубоко внутри среды. Из этих рисунков видно, что вблизи границы поле претерпевает весьма существенные изменения, в частности, электрическая и магнитная компонента не пропорциональны друг другу и обращаются в нуль в разных точках. С прохождением импульса вглубь среды постепенно форма импульса приближается к традиционной для длительных импульсов в диспергирующих средах.

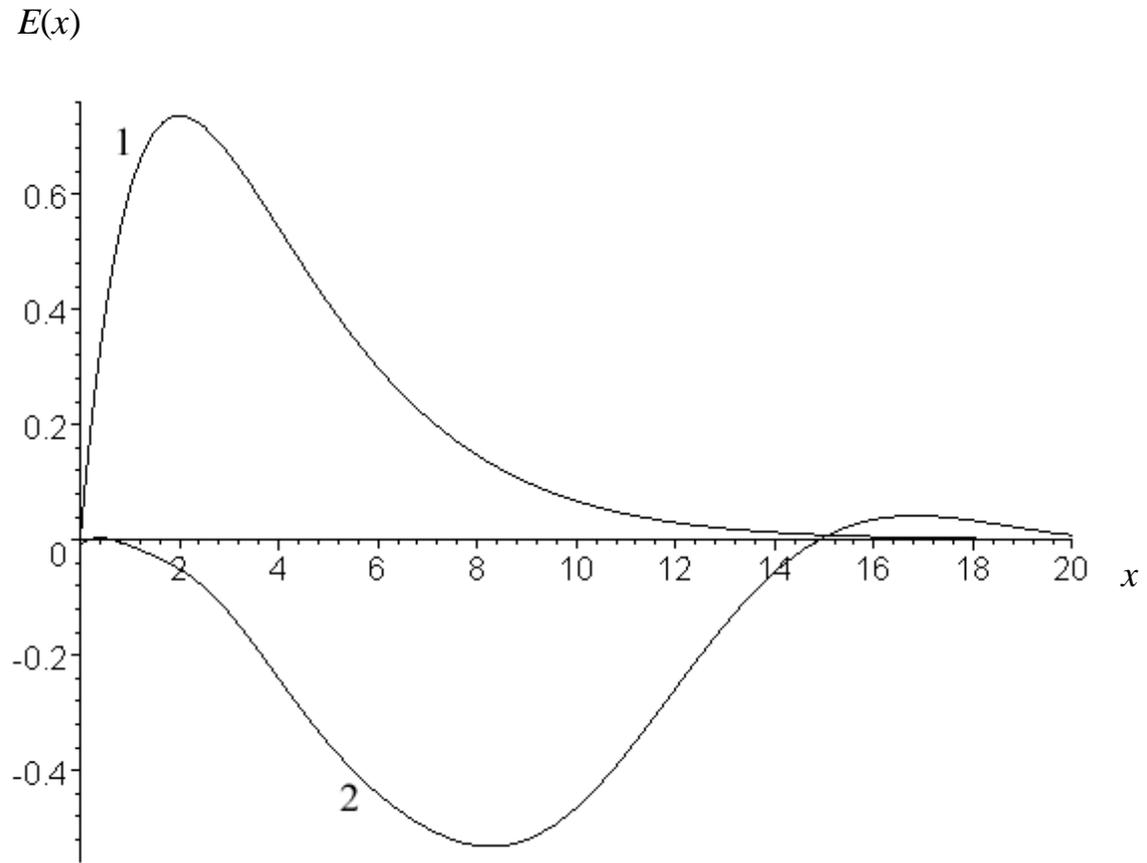


Рис. 2.2. $\alpha = 0.5$. 1 – исходный импульс: $E(x) = L_0(x) - L_1(x)$, 2 – отраженный импульс.

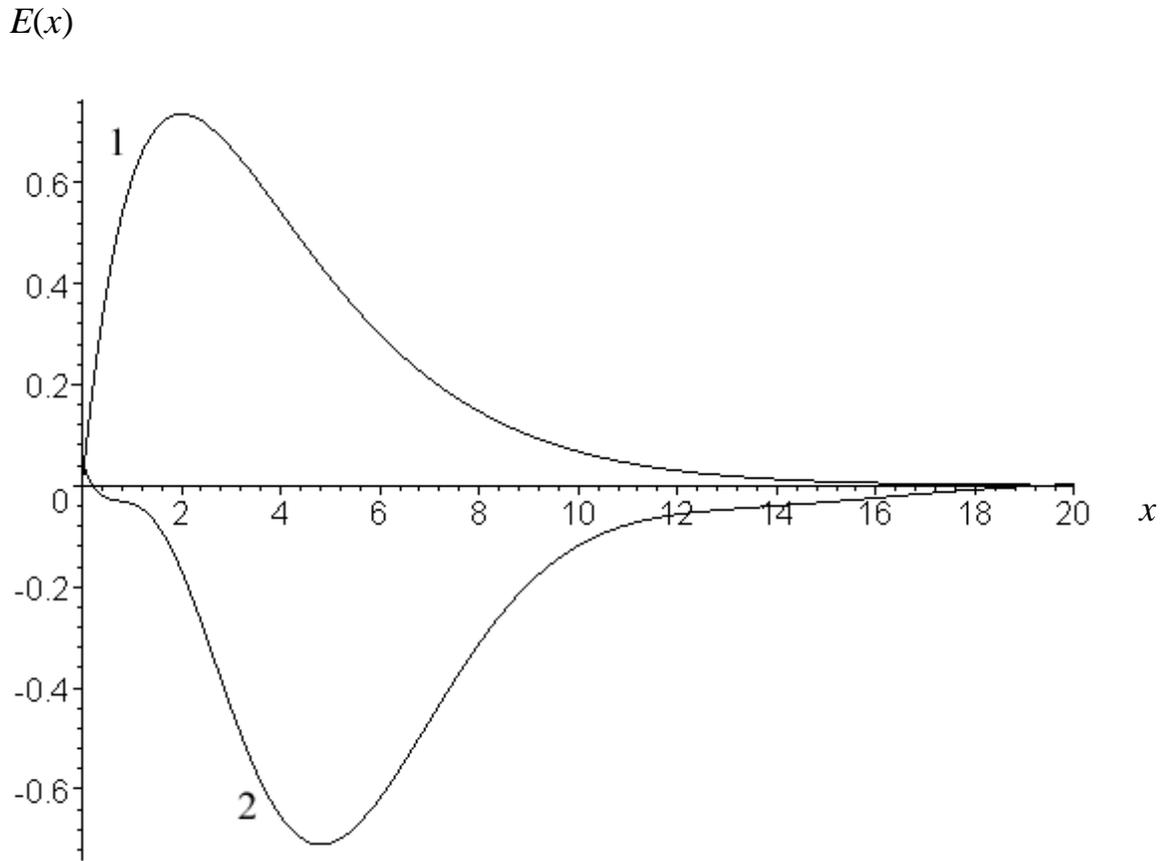


Рис. 2.3. $\alpha = 1.0$. 1 – исходный импульс: $E(x) = L_0(x) - L_1(x)$, 2 – отраженный импульс.

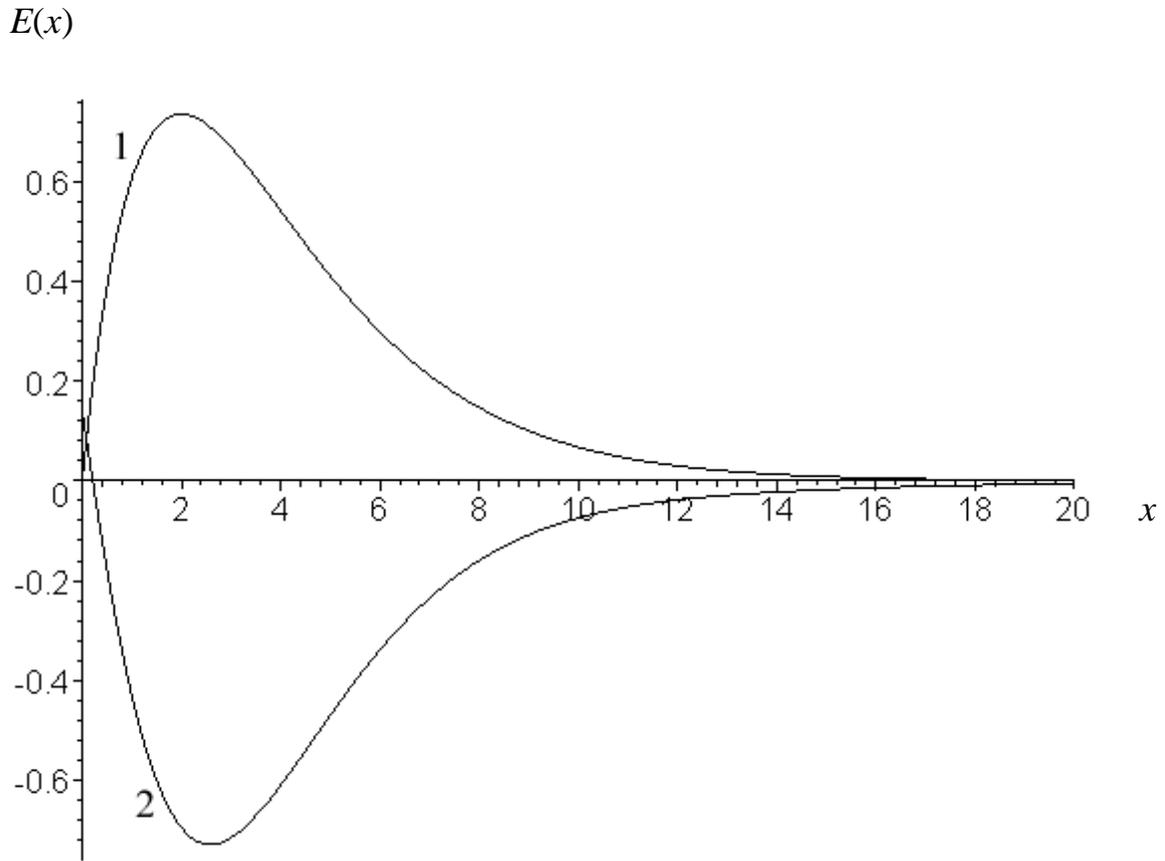


Рис. 2.4. $\alpha = 1.5$. 1 – исходный импульс: $E(x) = L_0(x) - L_1(x)$, 2 – отраженный импульс.

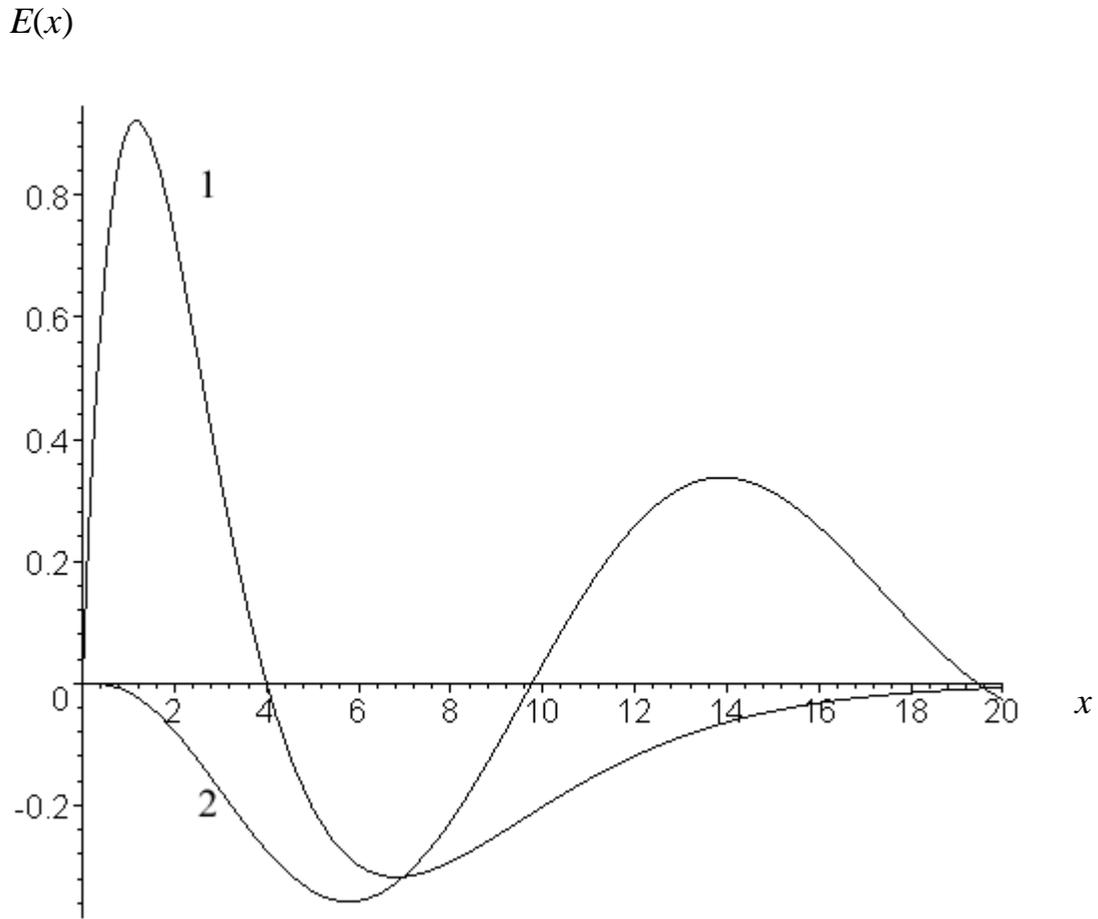


Рис. 2.5. $\alpha = 0.5$. 1 – исходный импульс: $E(x) = L_0(x) - L_2(x)$, 2 – отраженный импульс.

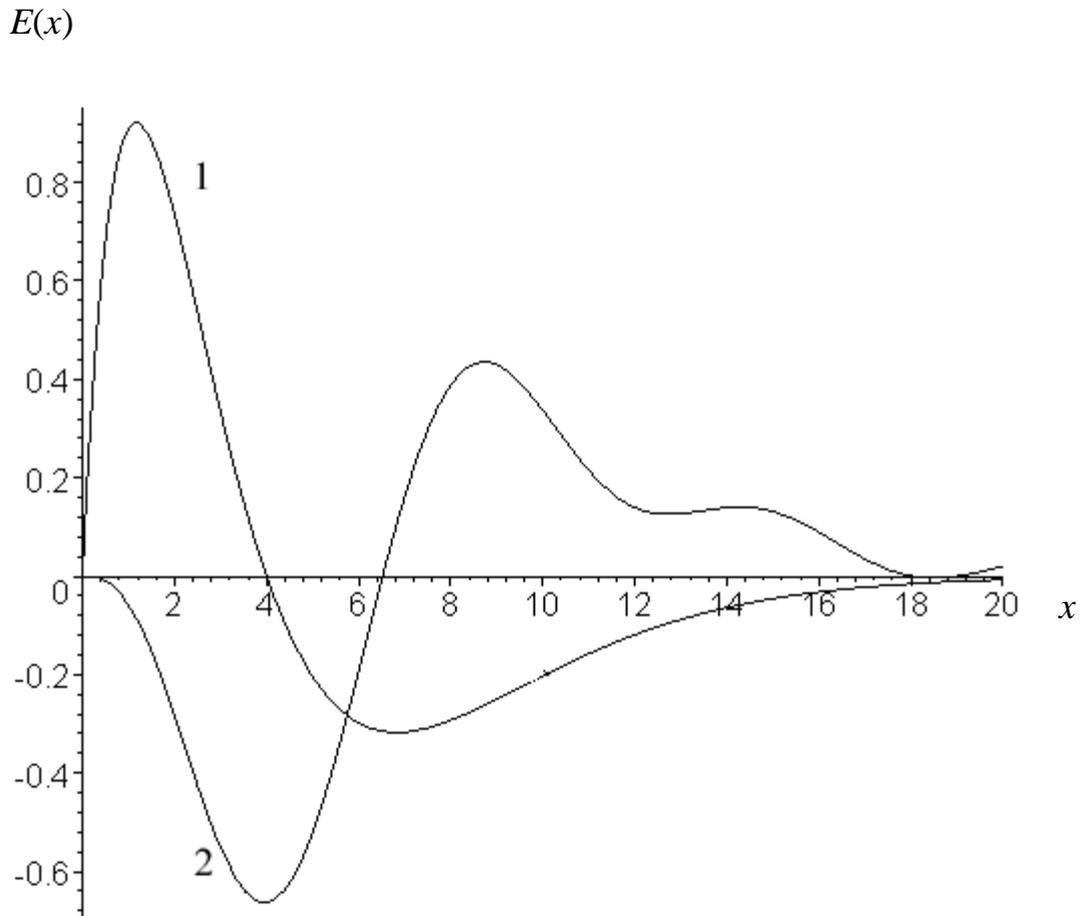


Рис. 2.6. $\alpha = 1.0$. 1 – исходный импульс: $E(x) = L_0(x) - L_2(x)$, 2 – отраженный импульс.

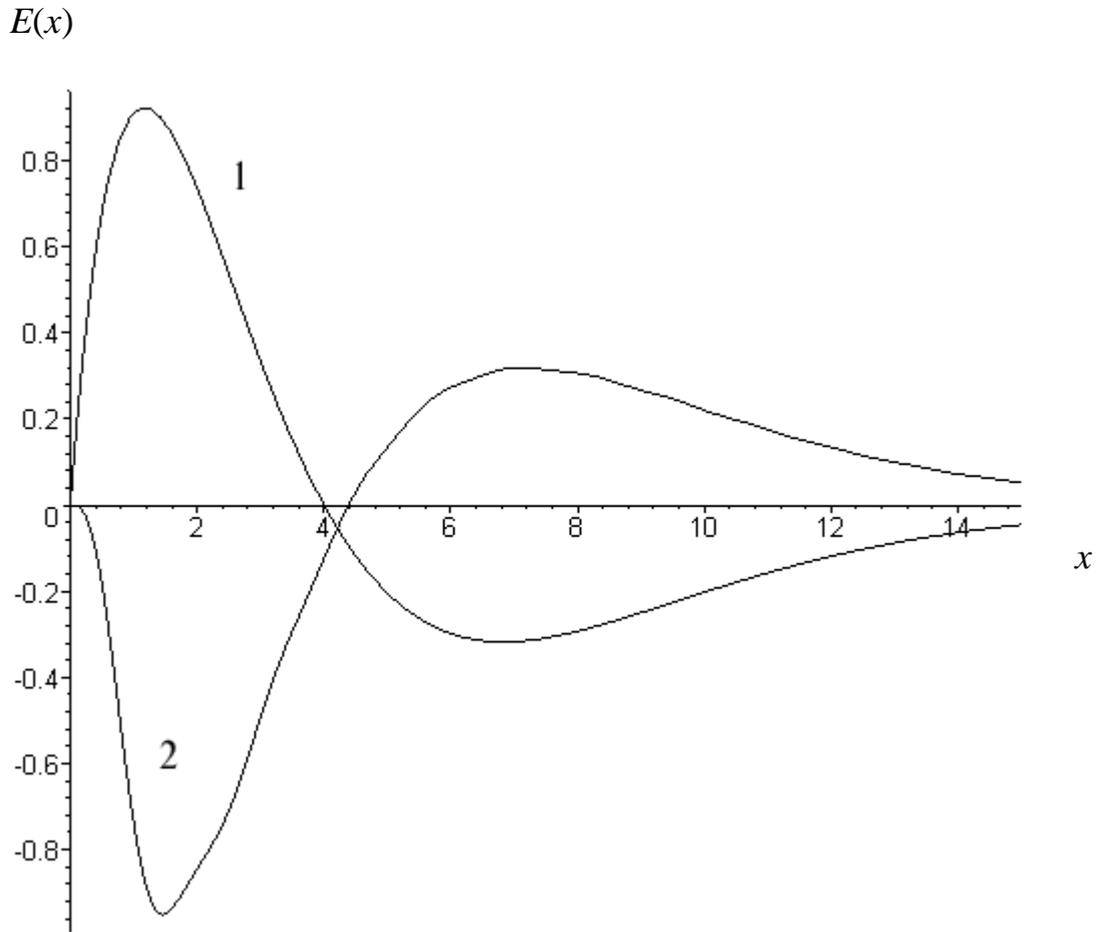


Рис. 2.7. $\alpha = 1.5$. 1 – исходный импульс: $E(x) = L_0(x) - L_2(x)$, 2 – отраженный импульс.

$E(\tau)$

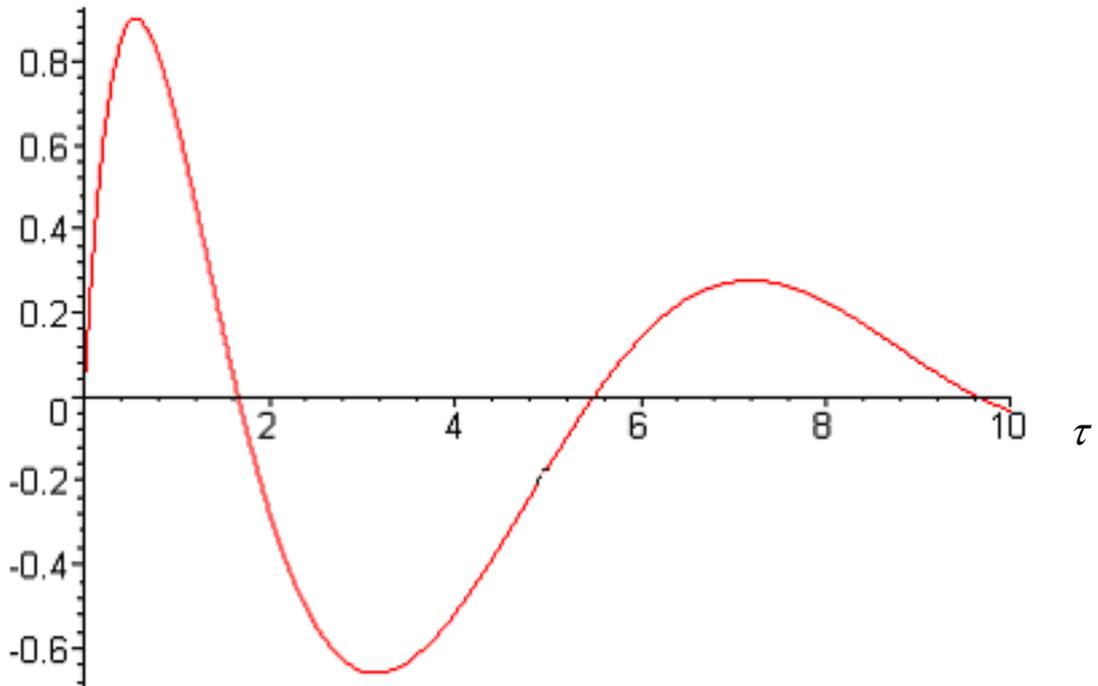


Рис. 2.8. Электрическая компонента прошедшего импульса на границе среды ($\eta = 0$) при $\alpha = 0.5$, исходный импульс: $E(x) = L_0(x) - L_2(x)$.

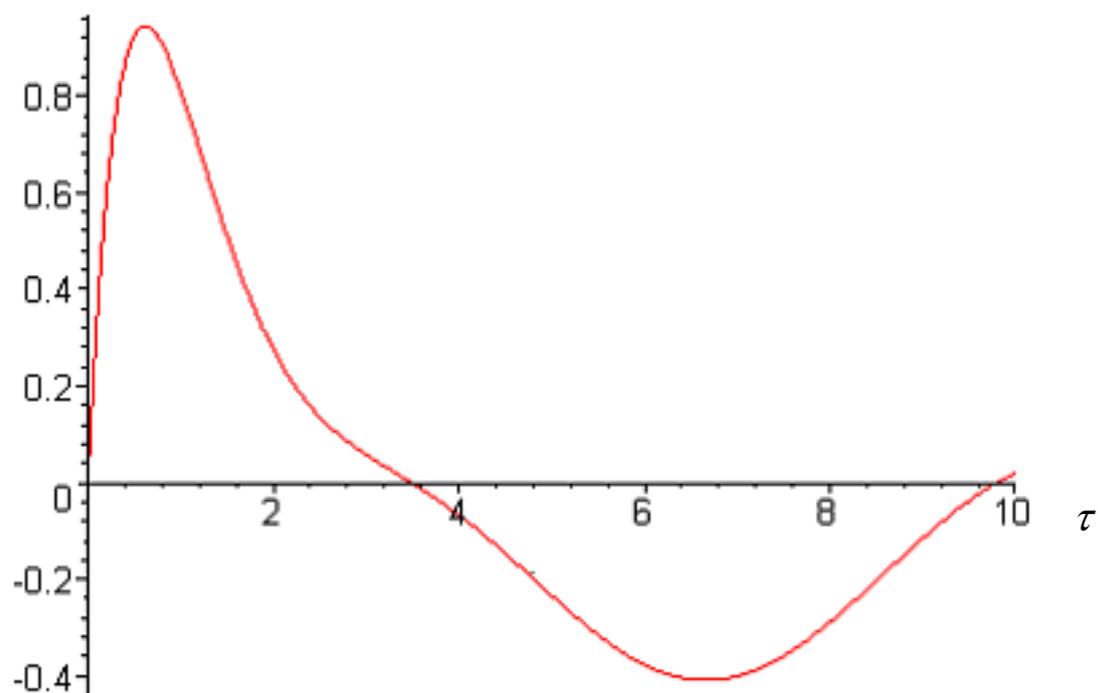
$H(\tau)$


Рис. 2.9. Магнитная компонента прошедшего импульса на границе среды ($\eta = 0$) при $\alpha = 0.5$, исходный импульс: $H(x) = L_0(x) - L_2(x)$.

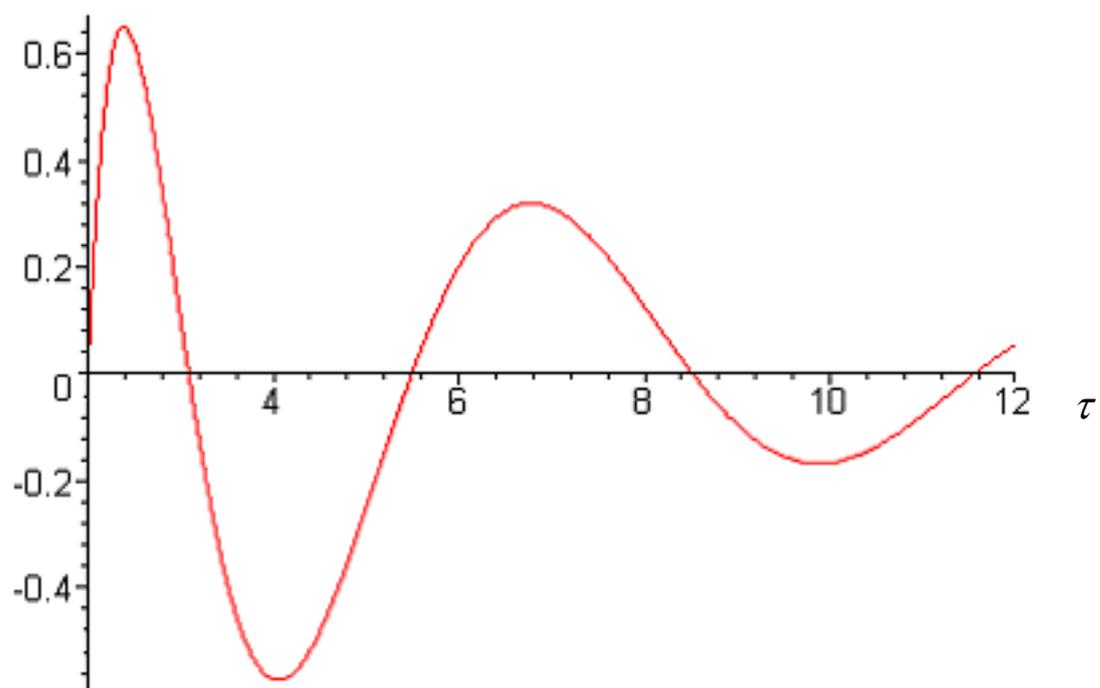
$E(\tau)$ 

Рис. 2.10. Электрическая компонента прошедшего импульса внутри среды ($\eta = 2$) при $\alpha = 0.5$, исходный импульс: $E(x) = L_0(x) - L_2(x)$.

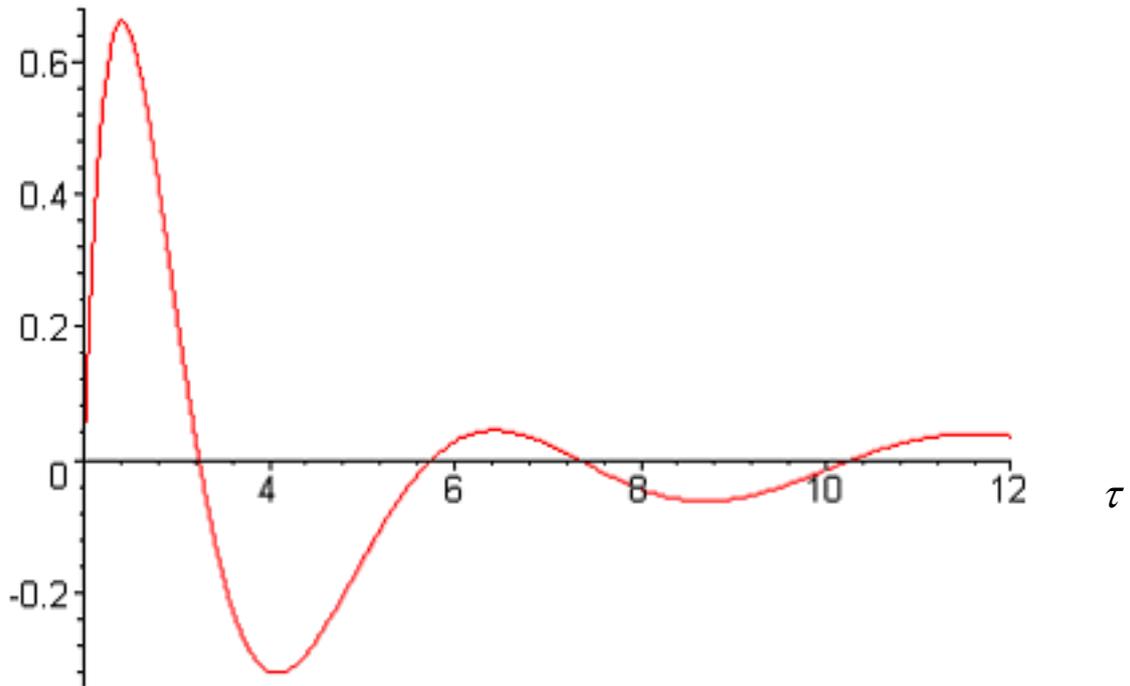
$H(\tau)$ 

Рис. 2.11. Магнитная компонента прошедшего импульса внутри среды ($\eta = 2$) при $\alpha = 0.5$, исходный импульс: $H(x) = L_0(x) - L_2(x)$.

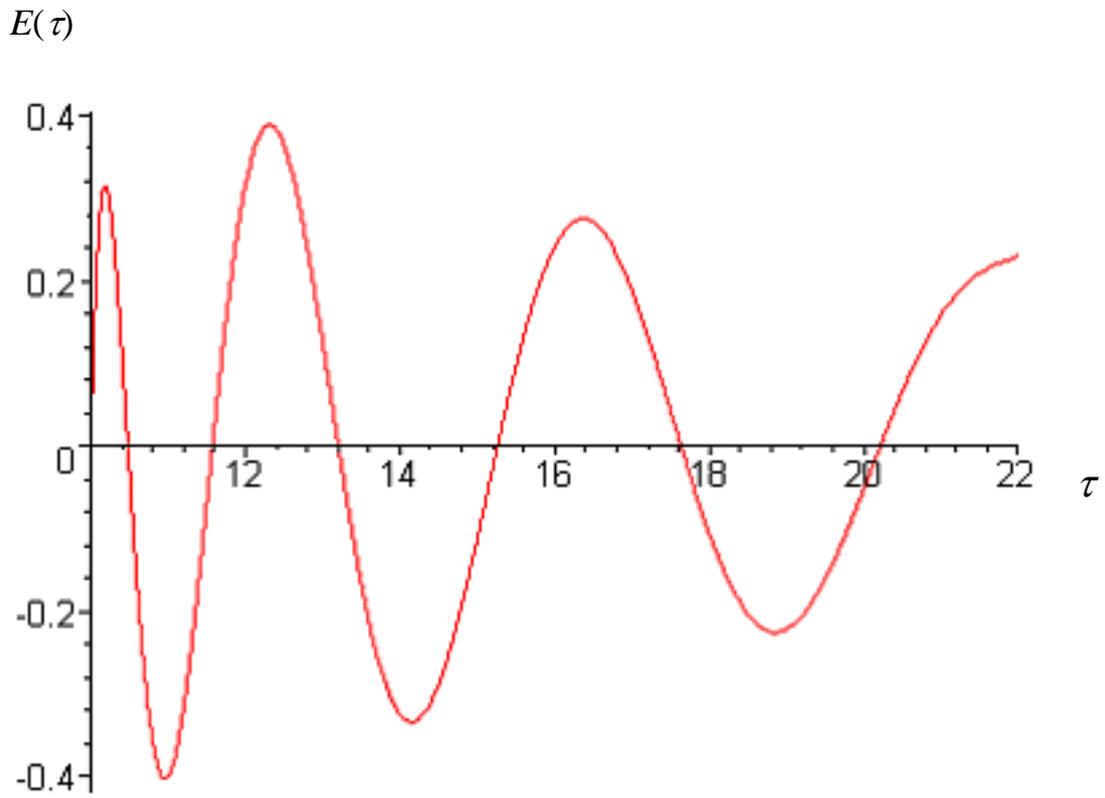


Рис. 2.12. Электрическая компонента прошедшего импульса внутри среды ($\eta = 10$) при $\alpha = 0.5$, исходный импульс: $E(x) = L_0(x) - L_2(x)$.

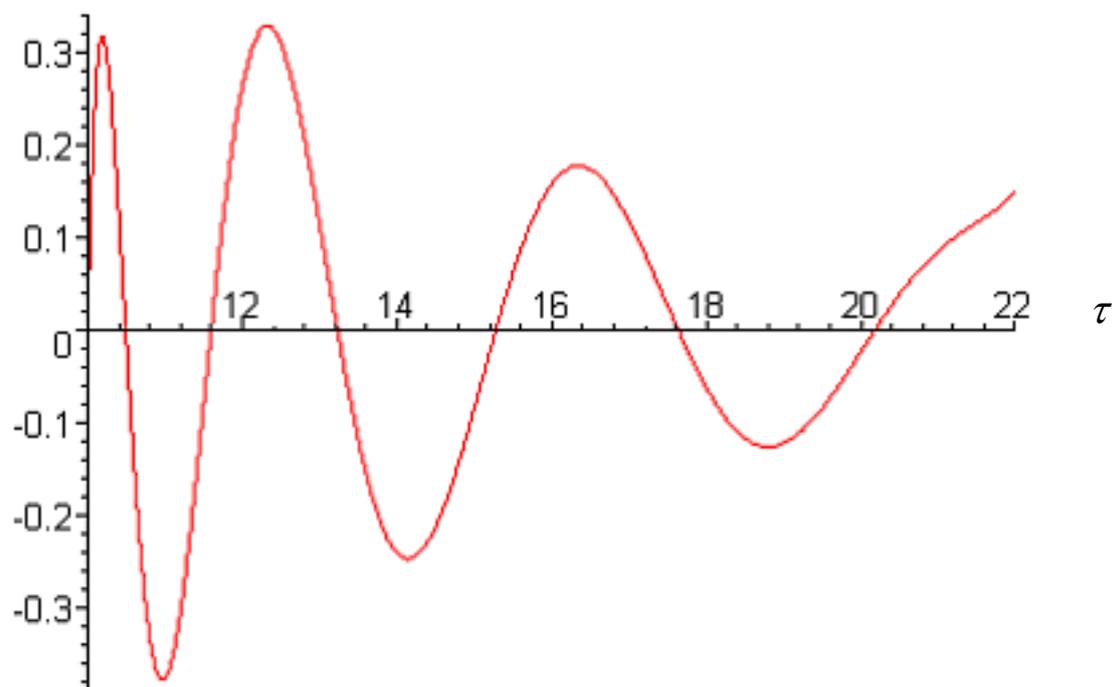
$H(\tau)$ 

Рис. 2.13. Магнитная компонента прошедшего импульса внутри среды ($\eta = 10$) при $\alpha = 0.5$, исходный импульс: $H(x) = L_0(x) - L_2(x)$.

2.6 Основные результаты главы 2

В заключение кратко остановимся на особенностях предлагаемого подхода и полученных в данной главе результатах.

- Развита техника решения уравнений Максвелла для плазмподобной среды во временной области без использования Фурье-представления;
- При анализе решений не используется понятие диэлектрической проницаемости ε , а дисперсия не разделяется на традиционные дисперсии первого, второго и т.д. порядков;
- Получена временная зависимость поля отраженного и проходящего импульса для исходных импульсов различной продолжительности в сравнении с плазменной частотой среды.

Глава 3

Отражение и пропускание волн тонкими неоднородными пленками (точно решаемая модель)

3.1 Введение

Эффекты, возникающие при взаимодействии различным образом поляризованных электромагнитных волн со слоистыми средами с непрерывной координатной зависимостью диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$, привлекают существенное внимание в связи с их учетом и использованием в целом ряде практических приложений. В случае изотропной слоистой среды эти эффекты проявляются при наклонном падении волны на ее поверхность, скорости s- и p-поляризованных волн внутри среды при этом различны. Это различие приводит к сдвигу фаз между s- и p-поляризованными компонентами, как для отраженной, так и для преломленной волны. В отличие от анизотропных материалов, в изотропных средах этот сдвиг определяется профилем зависимости $\varepsilon(z)$. Эффекты такого рода важны при решении задач эллипсометрии [63], электромагнитного бесстолкновительного нагрева локализованной области в глубине плотной неоднородной плазмы [64], распространения волн в слоистых средах [65].

В настоящее время описаны лишь несколько профилей диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$, позволяющих получить точное аналитическое решение уравнений Максвелла для наклонного падения произвольно поляризованной волны. Среди них в первую очередь следует отметить широко применяемое решение для профиля Релея [27]

$$\varepsilon(z) = n_0^2 \left(1 \pm \frac{z}{L} \right)^{-2}. \quad (3.1)$$

Решение аналогичной задачи для экспоненциального профиля

$$\varepsilon(z) = n_0^2 \exp\left(\frac{z}{L}\right)$$

рассмотрено в [28]. Основные моды неоднородной диэлектрической сферы

$$\varepsilon(r) = n_0^2 \left(1 - \frac{r}{L}\right)$$

обсуждаются в [29].

Однако все эти модели содержат единственный пространственный параметр L , что существенно ограничивает их область применимости. При рассмотрении более сложных профилей диэлектрической проницаемости используются приближенные методы решения, такие как ВКБ-приближение и компьютерное моделирование [66].

В данной главе предлагается более гибкая точно решаемая модель прохождения произвольно поляризованной электромагнитной волны через неоднородную немагнитную среду в любом направлении, содержащая два пространственных параметра. Этой моделью могут быть описаны как монотонные, так и вогнутые профили диэлектрической проницаемости. В отличие от слабоотражающих пленок для нормального падения [67], рассматриваемый далее профиль обеспечивает широкополосные почти безотражательные свойства для произвольно поляризованных электромагнитных волн, падающих в широком диапазоне углов. Используемый аналитический подход, единый для волн с разной поляризацией, позволяет оптимизировать параметры покрытия, обеспечивая заданный диапазон углов и частот безотражательного распространения электромагнитных волн.

3.2 Базовые уравнения для s- и р-поляризованной волны

Рассмотрим систему уравнений Максвелла для s- и р-поляризованной волны и сведем ее к одному уравнению, в котором профиль диэлектрической проницаемости будет выступать в роли параметра.

Выразив электрическую индукцию в среде $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ через некоторую безразмерную функцию координаты $U(z)$:

$$\varepsilon(z) = n_0^2 U^2(z);$$

$$U(0) = 1,$$

можно записать уравнения Максвелла, связывающие компоненты E_x , H_y и H_z для s-поляризованной волны, в виде

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t};$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t};$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{n_0^2 U^2(z)}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Уравнения Максвелла для р-поляризованной волны записываются в иной форме:

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{n_0^2 U^2(z)}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t};$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = -\frac{n_0^2 U^2(z)}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t};$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t}. \quad (3.3)$$

Здесь n_0 - значение диэлектрической проницаемости на плоскости $z = 0$; неизвестная функция $U(z)$, характеризующая среду в полупространстве $z \geq 0$, предполагается дважды дифференцируемой.

При рассмотрении электромагнитных полей, зависящих от двух пространственных координат y и z , удобно ввести производящие функции Ψ_s и Ψ_p , преобразующие каждую из систем (3.2) и (3.3) уравнений Максвелла в одно уравнение. Эти преобразования для s- и p-поляризации будут различными.

Рассмотрим сначала случай s-поляризации. Выражая компоненты поля (3.2) через некоторую функцию Ψ_s

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_s}{\partial t}; \\ H_y &= \frac{\partial \Psi_s}{\partial z}; \\ H_z &= \frac{\partial \Psi_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.4)$$

и представляя эту функцию в виде уравнения бегущей волны с пространственно модулированной амплитудой

$$\Psi_s = f_s(z) \exp[i(k_{\parallel} y - \omega t)], \quad (3.5)$$

где f_s - безразмерная функция, k_{\parallel} - тангенциальная компонента волнового вектора, сведем систему (3.2) к одному уравнению:

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial z^2} - k_{\parallel}^2 f_s + \frac{\omega^2 n_0^2 U^2(z)}{c^2} f_s = 0. \quad (3.6)$$

Введя новую функцию F_s и новую пространственную переменную η следующим образом:

$$\begin{aligned} f_s &= \frac{F_s}{\sqrt{U}}; \\ \eta &= \int_0^z U(z_1) dz_1, \end{aligned} \quad (3.7)$$

можно переписать уравнение (3.6) в виде:

$$\frac{\partial^2 F_s}{\partial \eta^2} + F_s \left[\frac{n_0^2 \omega^2}{c^2} - \frac{k_{\parallel}^2}{U^2} - \frac{1}{2U} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{1}{4U^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)^2 \right] = 0. \quad (3.8)$$

Мы получили базовое уравнение для s-поляризованной волны. Прежде чем рассматривать его более подробно, получим аналогичное уравнение для р-поляризации. Компоненты поля для р-поляризованной волны могут быть записаны с помощью производящей функции Ψ_p :

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{n_0}{c} \frac{\partial \Psi_p}{\partial t}; \\ E_y &= \frac{1}{n_0 U^2(z)} \frac{\partial \Psi_p}{\partial z}; \\ E_z &= -\frac{1}{n_0 U^2(z)} \frac{\partial \Psi_p}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Подстановка (3.9) в систему (3.3) дает одно уравнение для функции Ψ_p , выглядящее следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial y^2} - \frac{n_0^2 U^2(z)}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial t^2} = \frac{2}{U(z)} \frac{\partial U(z)}{\partial z} \frac{\partial \Psi_p}{\partial z}. \quad (3.10)$$

Будем искать решение уравнения (3.10) в виде аналогичном (3.5) для Ψ_s :

$$\Psi_p = \sqrt{U(z)} F_p(z) \exp[i(k_{\parallel} y - \omega t)]. \quad (3.11)$$

С помощью переменной η (3.7) после этого получим уравнение для функции F_p :

$$\frac{\partial^2 F_p}{\partial \eta^2} + F_p \left[\frac{n_0^2 \omega^2}{c^2} - \frac{k_{\parallel}^2}{U^2} + \frac{1}{2U} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \frac{3}{4U^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)^2 \right] = 0. \quad (3.12)$$

3.3 Выражения для поляриационных компонент электромагнитного поля внутри неоднородного диэлектрика

Профиль диэлектрической проницаемости $U(z)$ в полученных выше уравнениях не определен. Определим далее профиль, допускающий точное решение систем (3.2) и (3.3). Рассмотрим, в отличие от указанных ранее случаев, профиль с двумя свободными параметрами L и M (рис. 3.1):

$$U(z) = \left(\cos \frac{z}{L} + M \sin \frac{z}{L} \right)^{-1}. \quad (3.13)$$

Здесь L - пространственный масштаб распределения $U(z)$. В дальнейшем мы будем рассматривать случай $M > 0$, описывающий профиль с убыванием величины U от значения $U = 1$ при $z = 0$ до минимального значения U_m (рис. 3.1) с последующим возрастанием вновь до значения $U = 1$ в точке $z = d$,

$$U_m = (1 + M^2)^{-\frac{1}{2}};$$

$$L = \frac{d}{2 \operatorname{arctg} M}.$$

Используя профиль (3.13) и определение переменной η (3.7), можно найти функцию $U(\eta)$ из уравнений (3.8) и (3.12):

$$U(\eta) = \frac{chv}{\sqrt{1 + M^2}};$$

$$v = \frac{\eta}{a} - \operatorname{arcsh} M;$$

$$\frac{\eta}{a} = \ln \left(\frac{1 + m_+ \operatorname{tg} \frac{z}{2L}}{1 - m_- \operatorname{tg} \frac{z}{2L}} \right);$$

$$m_{\pm} = \sqrt{1 + M^2} \pm M;$$

$$a = \frac{L}{\sqrt{1 + M^2}}. \quad (3.14)$$

Подстановка (3.14) в уравнения (3.8) и (3.12) позволяет получить единое уравнение для обоих типов поляризации. Определенный ее тип будет задаваться в нем только при помощи коэффициентов T_s и T_p :

$$\frac{\partial^2 F_{s,p}}{\partial v^2} + F_{s,p} \left(q^2 - \frac{T_{s,p}}{ch^2 v} \right) = 0; \quad (3.15)$$

$$q^2 = \frac{n_0^2 \omega^2 a^2}{c^2} - \frac{1}{4};$$

$$T_s = (k_{\parallel} L)^2 + \frac{1}{4};$$

$$T_p = (k_{\parallel} L)^2 - \frac{3}{4}.$$

Следует подчеркнуть, что обе функции F_s и F_p определяются одним и тем же уравнением (3.15). Уравнения такого типа, в частности, широко применяются в квантовой механике [68]. Рассматривая волны высокочастотного диапазона

$$\omega \geq \Omega = \frac{c}{2n_0 a},$$

соответствующего области прозрачности ($q^2 \geq 0$), будем искать решение уравнения (3.15) в виде

$$F_{s,p} = (ch v)^{iq} Q_{s,p}(u); \quad (3.16)$$

$$u = \frac{1}{2}(1 - th v).$$

Подстановка (3.16) в уравнение (3.15) дает уравнение для функции $Q_{s,p}$:

$$u(1-u) \frac{\partial^2 Q_{s,p}}{\partial v^2} + (1-iq)(1-2u) \frac{\partial Q_{s,p}}{\partial v} + (q^2 + iq - T_{s,p}) Q_{s,p} = 0. \quad (3.17)$$

Введя параметры α , β и γ :

$$\gamma = 1 - iq;$$

$$\alpha + \beta + 1 = 2\gamma;$$

$$\alpha\beta = T - q^2 - iq, \quad (3.18)$$

перепишем уравнение (3.17) в виде:

$$u(1-u) \frac{\partial^2 Q_{s,p}}{\partial v^2} + [\gamma - u(1 + \alpha + \beta)] \frac{\partial Q_{s,p}}{\partial v} - \alpha\beta Q_{s,p} = 0. \quad (3.19)$$

Значения параметров α и β для s- и p-поляризации связаны с величинами T_s и T_p соответственно:

$$\alpha_s, \beta_s = \frac{1}{2} [1 - 2iq \pm 2i(k_{\parallel} L)];$$

$$\alpha_p, \beta_p = \frac{1}{2} [1 - 2iq \pm 2\sqrt{1 - (k_{\parallel} L)^2}].$$

Решением уравнения (3.19) является гипергеометрическая функция $W(\alpha, \beta, \gamma, u)$. Вследствие условия (3.18) вторым линейно независимым решением (3.19) будет гипергеометрическая функция $W(\alpha, \beta, \gamma, 1-u)$ [69]. Объединяя формулы (3.5), (3.7), (3.13) и (3.16), можно записать производящую функцию Ψ_s как сумму прямой и обратной волн:

$$\Psi_s = B_s (\Psi_1 + G_s \Psi_2) \Theta;$$

$$\Theta = \exp[i(k_{\parallel} y - \omega t)];$$

$$\Psi_{1,2} = \sqrt{\cos \frac{z}{L} + M \sin \frac{z}{L}} (ch v)^{iq} S_{\mp}. \quad (3.20)$$

Здесь функции S_- и S_+ :

$$S_{\mp} = W(\alpha_s, \beta_s, \gamma, u_{\mp});$$

$$u_{\mp} = \frac{1}{2} (1 \mp th v), \quad (3.21)$$

B_s - нормировочный коэффициент. Компоненты s-поляризованной электромагнитной волны находятся подстановкой (3.10) в (3.4):

$$E_x = \frac{i\omega}{c} B_s (\Psi_1 + G_s \Psi_2) \Theta;$$

$$H_y = B_s (\Psi'_1 + G_s \Psi'_2) \Theta,$$

$$\Psi'_{1,2} = \frac{\partial \Psi_{1,2}}{\partial z}; \quad (3.22)$$

$$H_z = -ik_{\parallel} B_s (\Psi_1 + G_s \Psi_2) \Theta.$$

Сходная процедура дает производящую функцию для р-поляризованной волны:

$$\Psi_p = B_p (\Psi_3 + G_p \Psi_4) \Theta;$$

$$\Psi_{3,4} = \frac{(ch v)^{iq} P_{\mp}}{\sqrt{\cos \frac{z}{L} + M \sin \frac{z}{L}}}; \quad (3.23)$$

$$P_{\mp} = W(\alpha_p, \beta_p, \gamma, u_{\mp}).$$

Выражения для u_{-} и u_{+} даны в (3.21). Компоненты р-поляризованной волны находятся подстановкой (3.23) в (3.9):

$$H_x = -\frac{n_0 i \omega}{c} B_p (\Psi_3 + G_p \Psi_4) \Theta;$$

$$E_y = \frac{B_p}{n_0 U^2(z)} (\Psi'_3 + G_p \Psi'_4) \Theta,$$

$$\Psi'_{3,4} = \frac{\partial \Psi_{3,4}}{\partial z}; \quad (3.24)$$

$$E_z = -\frac{ik_{\parallel} B_p}{n_0 U^2(z)} (\Psi_3 + G_p \Psi_4) \Theta.$$

Коэффициенты G_s в (3.22) и G_p в (3.24) будут найдены далее исходя из условий непрерывности электромагнитного поля на границе среды.

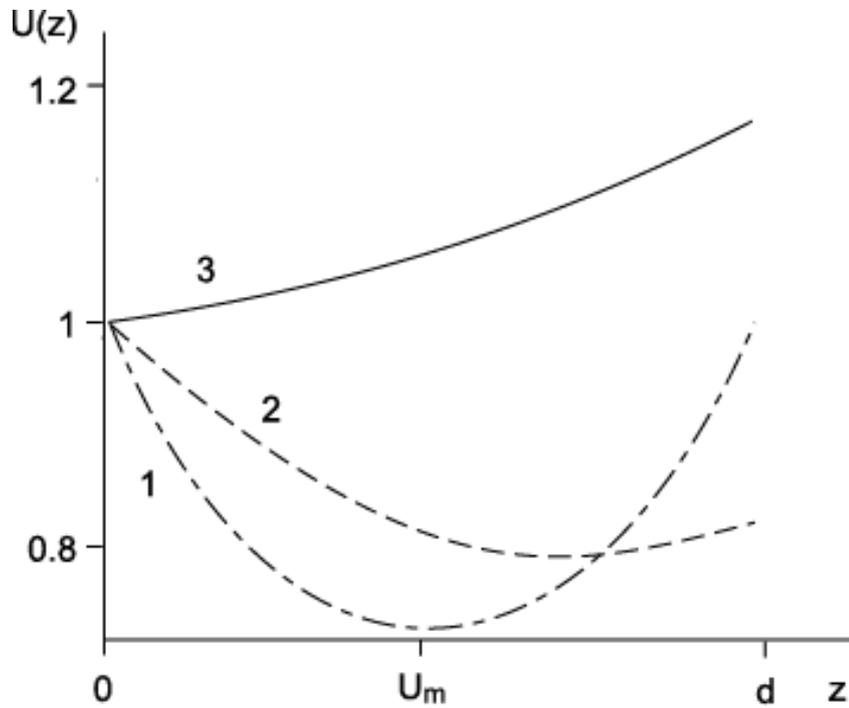


Рис. 3.1. Профили диэлектрической проницаемости $U(z)$ для различных

значений параметра M : 1 – $M = 0.75$, $L = \frac{d}{2\operatorname{arctg}M}$, 2 – $M = 0.95$, $L = d/2$, 3 –

$M = -0.2$, $L = \frac{d}{2\operatorname{arctg}M}$.

3.4 Поляризационная зависимость коэффициентов отражения

Рассмотрим отражение электромагнитной волны, содержащей обе поляризационные компоненты и падающей из некоторой однородной диэлектрической среды или вакуума на поверхность $z = 0$ слоя толщины d с профилем диэлектрической проницаемости вида (3.13) под произвольным углом δ .

$$\Psi_{s,p} = A_{s,p} \exp[i(k_{\perp}z + k_{\parallel}y - \omega t)]. \quad (3.25)$$

Здесь k_{\perp} и k_{\parallel} - нормальная и тангенциальная компоненты волнового вектора, константы A_s и A_p относятся к s- и p-поляризации соответственно. Подстановка (3.25) в (3.4) и (3.9) дает электрическую и магнитную компоненты для обоих случаев:

S-поляризация:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{i\omega}{c} \Psi_s; \\ H_y &= ik_{\perp} \Psi_s; \\ H_z &= -ik_{\parallel} \Psi_s; \end{aligned} \quad (3.26)$$

P-поляризация:

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{i\omega}{c} \Psi_p; \\ E_y &= ik_{\perp} \Psi_p; \\ E_z &= -ik_{\parallel} \Psi_p. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Для того, чтобы изучить отражение от покрытия, следует найти комплексные коэффициенты отражения R_s и R_p для каждого типа поляризации в отдельности.

Для s-поляризации условия непрерывности для компонент E_x , H_y и H_z на поверхности $z = 0$ можно получить из выражений (3.22) и (3.26):

$$1 + R_s = b_s [\Psi_1(0) + G_s \Psi_2(0)];$$

$$\frac{i\omega}{c}(1 - R_s) \cos \delta = b_s [\Psi_1'(0) + G_s \Psi_2'(0)]; \quad (3.28)$$

$$-\frac{i\omega}{c}(1 + R_s) \sin \delta = -ik_{\parallel} b_s [\Psi_1(0) + G_s \Psi_2(0)].$$

Здесь b_s - нормализованная амплитуда преломленной волны: $b_s = B_s / A_s$.

Исключая b_s из системы (3.28), найдем коэффициенты

$$R_s = \frac{\cos \delta + \frac{ic}{\omega} K_s}{\cos \delta - \frac{ic}{\omega} K_s};$$

$$K_s = \frac{\Psi_1'(0) + G_s \Psi_2'(0)}{\Psi_1(0) + G_s \Psi_2(0)}. \quad (3.29)$$

Чтобы получить коэффициент G_s , требуется учесть условия непрерывности электромагнитного поля на поверхности $z = d$ между неоднородным слоем и полупространством $z \geq d$, заполненным диэлектриком с коэффициентом преломления n_2 :

$$b_s [\Psi_1(d) + G_s \Psi_2(d)] = v_s;$$

$$b_s [\Psi_1'(d) + G_s \Psi_2'(d)] = \frac{i\omega}{c} v_s I; \quad (3.30)$$

$$I = \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \delta}.$$

Условия непрерывности для E_x и H_z в данном случае одинаковы; v_s здесь - нормализованная амплитуда электромагнитного поля в области $z \geq d$.

Коэффициент G_s , получаемый из (3.28), равен

$$G_s = -\frac{\Gamma \Psi_1(d) + \frac{ic}{\omega} \Psi_1'(d)}{\Gamma \Psi_2(d) + \frac{ic}{\omega} \Psi_2'(d)}. \quad (3.31)$$

Подстановка (3.31) в (3.29) дает выражение для коэффициента отражения R_s .

Рассмотрим далее случай р-поляризации. Используя формулы (3.24) и (3.27) и схожие с использованными для s-поляризованной волны граничные

условия на плоскости $z = 0$ для компонент H_x , E_y и для нормальной компоненты электрической индукции D_z , мы можем найти аналогично (3.29) коэффициент отражения R_p :

$$R_p = \frac{n_0^2 \cos \delta + \frac{ic}{\omega} K_p}{n_0^2 \cos \delta - \frac{ic}{\omega} K_p};$$

$$K_p = \frac{\Psi_3'(0) + G_p \Psi_4'(0)}{\Psi_3(0) + G_p \Psi_4(0)}.$$

Коэффициент G_p находится по аналогии с G_s из условий непрерывности поля на поверхности $z = d$:

$$G_p = - \frac{\Gamma \Psi_3(d) + \frac{ic}{\omega} \frac{n_2^2}{n_0^2} \Psi_3'(d)}{\Gamma \Psi_4(d) + \frac{ic}{\omega} \frac{n_2^2}{n_0^2} \Psi_4'(d)},$$

величина Γ определена в (3.30).

3.5 Оптимизация параметров слабоотражающих покрытий

Полученные выше формулы для коэффициентов отражения $|R_s|^2$ и $|R_p|^2$ пригодны для любых углов падения δ . Тем не менее, мы не будем рассматривать случай больших углов ($\delta \rightarrow 90^\circ$), так как при этом оба значения $|R_s|^2$ и $|R_p|^2$ стремятся к единице. Мы ищем случаи, когда условия $|R_s|^2 \ll 1$ и $|R_p|^2 \ll 1$ выполняются одновременно для широкого диапазона углов падения, например $0 \leq \delta \leq 45^\circ$, и спектра частот $\Delta\omega$.

Расчеты проводились для покрытия толщиной $d = 10^{-5}$ см, параметр M брался равным 0.88, значение диэлектрической проницаемости на внешней границе покрытия $n_0 = 2$, показатель преломления среды, находящейся за покрытием, $n_2 = 1.5 + 0.3i$. Такие значения параметров покрытия достаточно хорошо соответствуют современным технологическим возможностям в области нанесения тонких неоднородных покрытий. На рис. 3.2 и 3.3 показана зависимость коэффициентов отражения $|R_s|^2$ и $|R_p|^2$ соответственно от угла падения волны для ряда частот, рис. 3.4 и 3.5 демонстрируют аналогичную зависимость для покрытий различной толщины при частоте волны равной $1.5 \cdot 10^{15}$ с⁻¹. Как видно из рисунков, в достаточно широком диапазоне углов падения ($0 \leq \delta \leq 45^\circ$) и частот значения коэффициентов отражения не превосходят 10 %, а подбором толщины слоя их можно снизить до 2 – 5 %. Однородные покрытия той же толщины со сходными значениями диэлектрической проницаемости дают коэффициенты отражения $|R_s|^2, |R_p|^2 > 10$ %. Следовательно, использование тонких неоднородных покрытий с рассмотренным профилем диэлектрической проницаемости может существенно уменьшить отражение электромагнитных волн от поверхности диэлектрика [70].

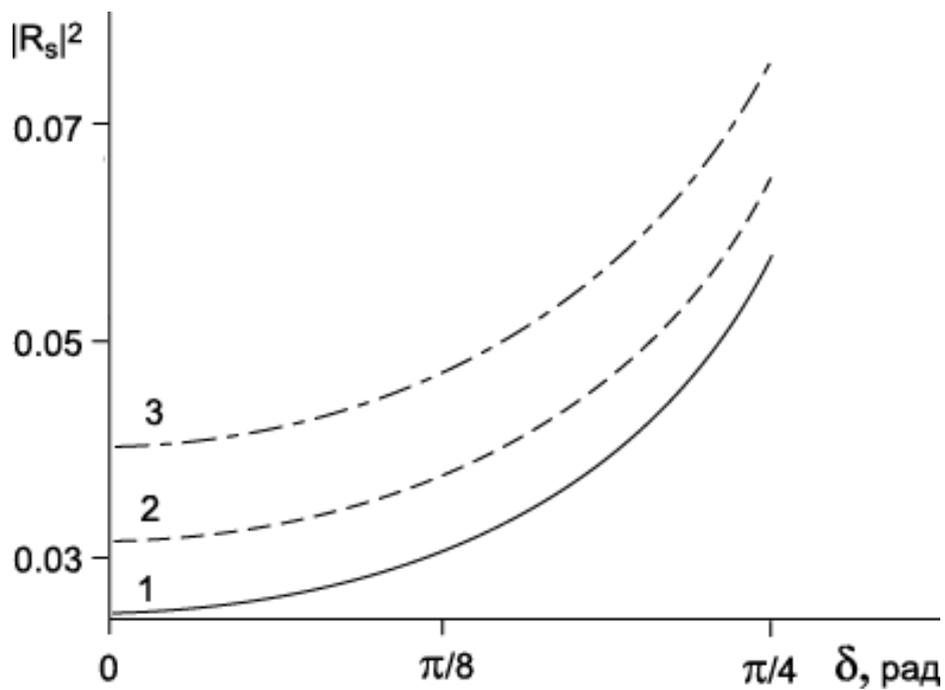


Рис. 3.2. Зависимость коэффициента отражения s-поляризованной волны от угла падения. $M = 0.88$, $d = 10^{-5}$ см. 1 – $\omega = 1.5 \cdot 10^{15}$ с $^{-1}$, 2 – $\omega = 1.75 \cdot 10^{15}$ с $^{-1}$, 3 – $\omega = 1.0 \cdot 10^{15}$ с $^{-1}$.

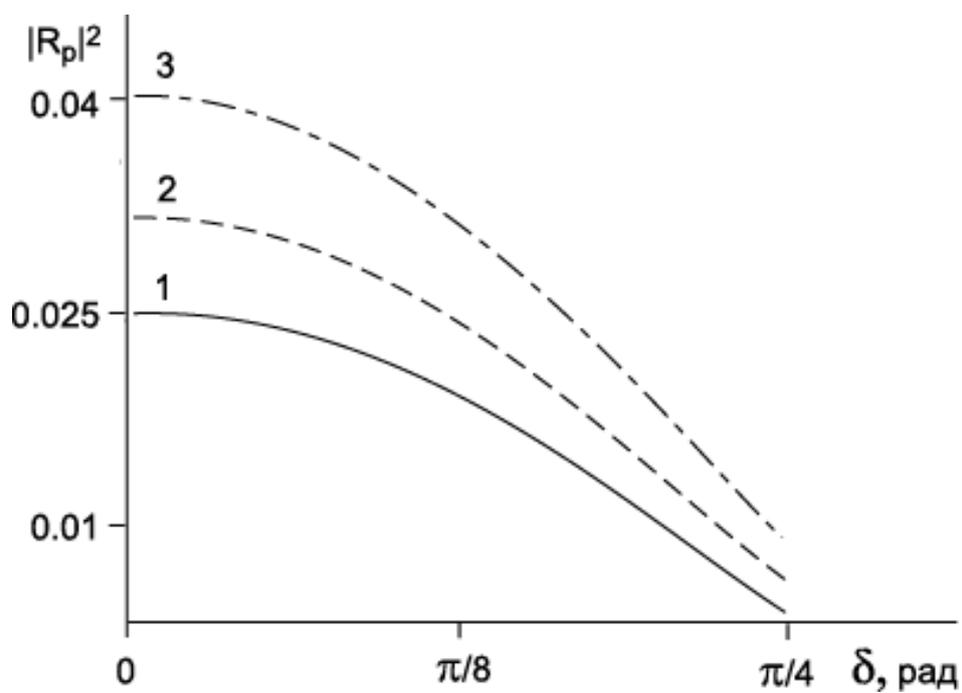


Рис. 3.3. Зависимость коэффициента отражения р-поляризованной волны от угла падения. $M = 0.88$, $d = 10^{-5}$ см. 1 – $\omega = 1.5 \cdot 10^{15}$ с $^{-1}$, 2 – $\omega = 1.75 \cdot 10^{15}$ с $^{-1}$, 3 – $\omega = 1.0 \cdot 10^{15}$ с $^{-1}$.

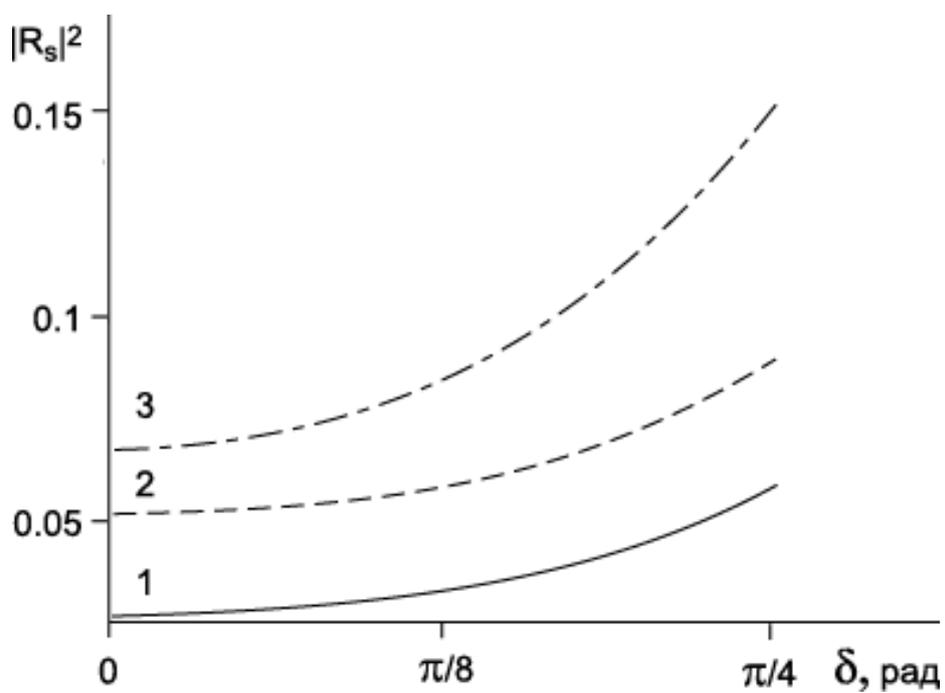


Рис. 3.4. Зависимость коэффициента отражения s-поляризованной волны от угла падения. $M = 0.88$, $\omega = 1.5 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$. 1 – $d = 10^{-5}$ см, 2 – $d = 1.5 \cdot 10^{-5}$ см, 3 – $d = 2 \cdot 10^{-5}$ см.

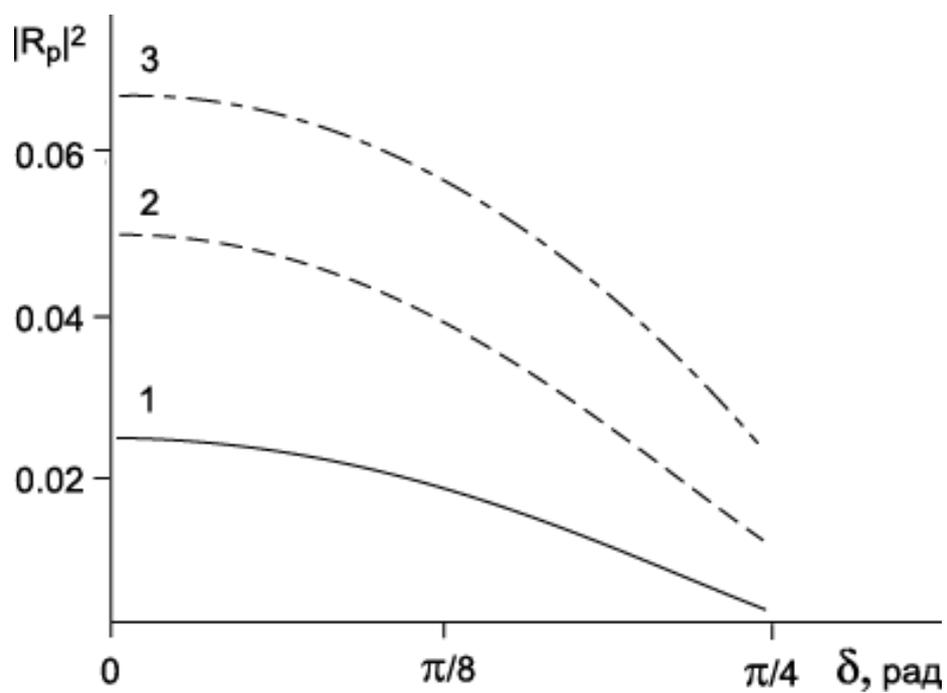


Рис. 3.5. Зависимость коэффициента отражения р-поляризованной волны от угла падения. $M = 0.88$, $\omega = 1.5 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$. 1 – $d = 10^{-5} \text{ см}$, 2 – $d = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, 3 – $d = 2 \cdot 10^{-5} \text{ см}$.

3.6 Основные результаты главы 3

Таким образом, в третьей главе получены следующие результаты.

- Построена новая точно решаемая модель в оптике неоднородных покрытий. Этой моделью, содержащей два свободных параметра, могут быть описаны как монотонные, так и вогнутые профили диэлектрической проницаемости.
- Разработан аналитический подход, позволяющий оптимизировать параметры покрытия, обеспечивая заданный диапазон углов и частот распространения электромагнитных волн со слабым отражением. Особенностью предлагаемого подхода является единообразие способов исследования волн с разной поляризацией.
- Рассчитаны коэффициенты отражения для профиля, дающего слабоотражательные свойства для произвольно поляризованных электромагнитных волн, падающих под произвольным углом.

Глава 4

Математические методы оптики неоднородных сред в задачах квантовой механики

4.1 Введение

Математический формализм теории тонких неоднородных пленок был развит в предыдущей главе для описания прохождения через них электромагнитных волн. Аналогичный подход применяется в этой главе и к известной задаче квантовой механики о нахождении собственных функций и спектра энергии частицы в «расщепленной» потенциальной яме («double-well potential»). Такой потенциал, характеризуемый одним максимумом, расположенным между двумя минимумами, показан на рис. 4.1. Модель, представленная на этом рисунке, использовалась в [68] для приближенного решения задачи о расщеплении уровней энергии частицы, локализованной в одной яме, под действием другой ямы. При этом предполагалось, что волновые функции квазиклассичны, а профиль потенциала считался симметричным относительно максимума. В работе [71] другая модель «расщепленного» потенциала, представленная «скрещенными параболой» использовалась для анализа эффекта туннелирования частицы между двумя потенциальными ямами; однако, применение «нефизического» острия в точке пересечения парабол ограничивало применимость такой модели [72]. В работе [73] модель двух прямоугольных потенциальных ям, разделенных прямоугольным барьером, служила теоретической основой для описания процесса туннелирования электрона в двумерной гетероструктуре.

В отличие от этих подходов, в настоящей работе предлагается достаточно общая модель «расщепленного» потенциального профиля, который может быть как симметричным, так и асимметричным и не содержит нефизических особенностей типа «острия» или «угла». Рассматриваемые профили содержат несколько свободных параметров, что облегчает их

использование для моделирования реальных физических систем. Для таких профилей потенциала ниже построены точные аналитические решения уравнений Шредингера. В разделе 4.2 строятся собственные функции уравнений Шредингера для общего случая «расщепленного» потенциала, показанного на рис. 1, а в разделе 4.3 вычисляются соответствующие собственные значения, определяющие уровни энергии в этом потенциале.

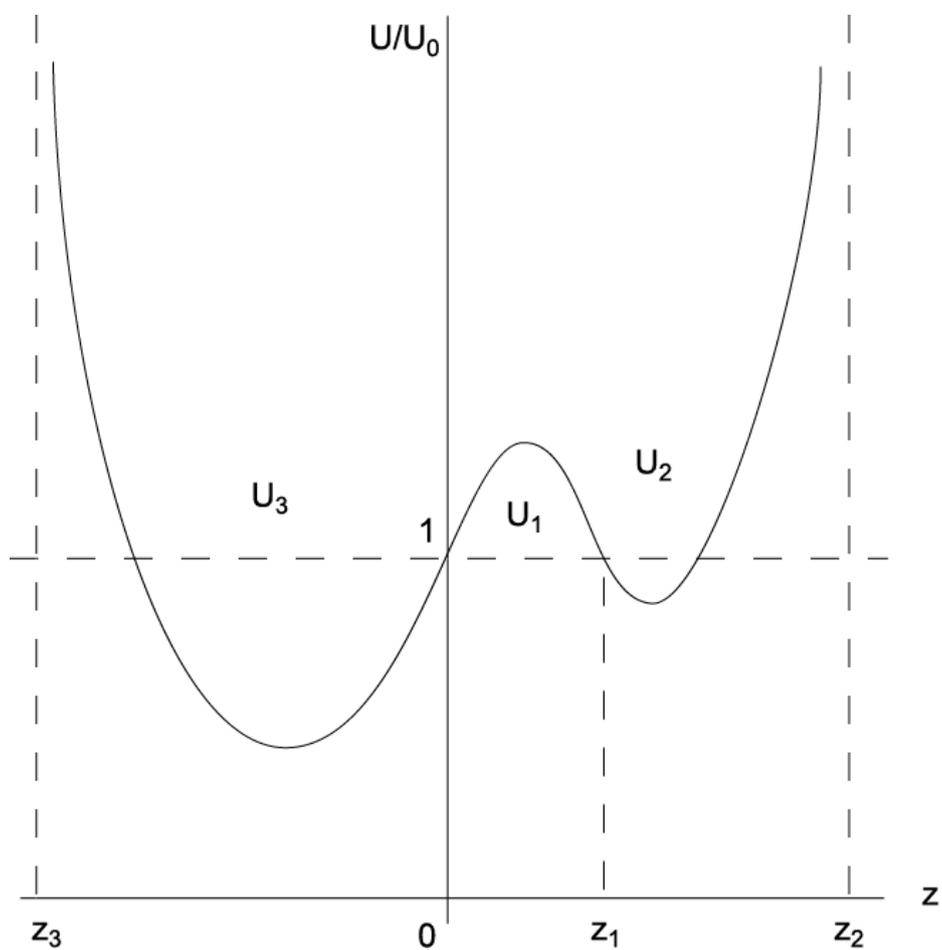


Рис. 4.1. «Расщепленный» нормированный потенциал $U(z)/U_0$, содержащий барьер U_1 и две потенциальные ямы U_2 и U_3 , обозначения z_1 , z_2 , z_3 и U_0 поясняются в разделе 4.2.

4.2 Собственные функции уравнения Шредингера для «расщепленного» потенциала

В этом разделе строятся точные аналитические решения стационарного одномерного уравнения Шредингера для потенциала $U(z)$, показанного на рис. 4.1. Рассматриваемая модель состоит из потенциальных ям U_2 и U_3 , разделенных барьером U_1 , при этом глубина каждой ямы произвольна. Уравнение Шредингера для каждой части профиля $U_n(z)$ ($n = 1, 2, 3$) записывается в виде

$$\frac{d^2\Psi_n}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_n)\Psi_n = 0. \quad (4.1)$$

Здесь

$$U_n = U_0 \left(1 - \frac{1}{b_n} + \frac{W_n^2(z)}{b_n} \right), \quad (4.2)$$

$$W_n^2 = \left[\cos\left(\frac{z}{L_n}\right) + M_n \sin\left(\frac{z}{L_n}\right) \right]^{-2}, \quad (4.3)$$

нормировочная постоянная U_0 имеет размерность энергии, а каждая часть профиля U_n характеризуется тремя параметрами: b_n , M_n и L_n . L_n – характерная длина для каждой части U_n , смысл безразмерных параметров b_n и M_n будет указан ниже.

Решение уравнения (4.3) будет проходить в три этапа:

1. Определение геометрических параметров, характеризующих каждый профиль U_n , и соотношений между параметрами, обеспечивающих непрерывность профиля $U(z)$ и его производной.
2. Преобразование уравнения (4.3) к новым переменным η_n .
3. Построение точных решений Ψ_n в переменных η_n .

При последующем анализе постоянная $U_0 > 0$ остается нормировочным параметром задачи.

1. Найдем характерные точки профиля $U(z)$, предполагая для простоты, что касание выпуклых и вогнутых частей профиля $U(z)$ происходит при значении $W_n = 1$. При этом область U_1 , соответствующая барьеру, расположена между точками $z = 0$ и $z = z_1$, где координата $z_1 > 0$, определяемая из условия $W_n(z_1) = 1$,

$$\frac{z_1}{L_1} = \operatorname{Arctg}\left(\frac{2M_1}{1-M_1^2}\right), \quad \frac{\pi}{2} > \frac{z_1}{L_1} > 0. \quad (4.4)$$

В области барьера, как видно из (4.2), значение параметра $b_1 < 0$, а высота барьера достигает значения U_{\max} в точке $z = \operatorname{Arctg} M_1$,

$$\frac{U_{\max}}{U_0} = 1 + \frac{1}{|b_1|} \frac{M_1^2}{1+M_1^2}. \quad (4.5)$$

Область правой ямы U_2 (рис. 4.1) ограничена слева точкой $z = z_1$, а справа – точкой $z = z_2$. Отсчитывая расстояния в этой области от точки z_1 и рассматривая для простоты бесконечно глубокий потенциальный ящик ($U_2(z_2) \rightarrow \infty$), получим из условия $\cos(z_2 / L_2) + M_2 \sin(z_2 / L_2) = 0$:

$$\frac{z_2}{L_2} = \operatorname{Arctg}\left(-\frac{1}{M_2}\right), \quad \frac{\pi}{2} < \frac{z_2}{L_2} < \pi. \quad (4.6)$$

В потенциальных ямах значение параметра $b > 0$, глубина потенциальной ямы U_2 зависит от параметров b_2 и M_2 :

$$\frac{(U_2)_{\min}}{U_0} = 1 - \frac{1}{b_2} \frac{M_2^2}{1+M_2^2} \quad (4.7)$$

Левая потенциальная яма расположена в области $z \leq 0$ между точками $z = 0$ и $z = z_3$ ($U_3(z_3) \rightarrow \infty$), где

$$|z_3| = L_3 \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{M_3^2}\right). \quad (4.8)$$

Глубина левой ямы $(U_3)_{\min}$ определяется формулой, аналогичной (4.7):

$$\frac{(U_3)_{\min}}{U_0} = 1 - \frac{1}{b_3} \frac{M_3^2}{1+M_3^2}.$$

Построенный профиль непрерывен в точках $z = 0$ и $z = z_1$ касания барьера U_1 и потенциальных ям U_2 и U_3 . Приравнявая значения первых производных функций U_1 , U_2 и U_3 в этих точках, получим условия гладкого касания барьера и потенциальных ям:

$$\text{при } z = 0: \frac{M_1}{|b_1|L_1} = \frac{M_3}{b_3L_3}, \text{ при } z = z_1: \frac{M_1}{|b_1|L_1} = \frac{M_2}{b_2L_2}. \quad (4.9)$$

Таким образом, каждый участок профиля (U_1 , U_2 , U_3) характеризуется тремя параметрами, весь профиль $U(z)$ (рис. 4.1) описывается девятью параметрами, из которых, с учетом соотношений (4.9), семь являются свободными. Такое гибкое представление потенциала позволяет использовать профиль (4.3) в том числе для моделирования ряда волновых процессов в неоднородных средах. При этом условия $U_1(0) = U_2(z_1) = 1$, $U_2(z_2) \rightarrow \infty$ и $U_3(z_3) \rightarrow \infty$, использованные выше для упрощения расчетов, не снижают общности анализа; этот же подход применим и при других значениях потенциалов в точках касания, а также при конечных $U_2(z_2)$ и $U_3(z_3)$.

2. Уравнение Шредингера (4.1) для потенциала (4.2) решается переходом к переменным η_n :

$$\eta_n(z) = \int_0^z W_n(z') dz' \quad (4.10)$$

и введением новых функций

$$f_n = \Psi_n \sqrt{W_n(z)} \quad (4.11)$$

Уравнения, определяющие функции f_n , получаются подстановкой (4.11) в (4.2):

$$\frac{d^2 f_n}{dz^2} - \frac{1}{W_n} \frac{df_n}{dz} \frac{dW_n}{dz} + f_n \left[\frac{3}{4W_n^2} \left(\frac{dW_n}{dz} \right)^2 - \frac{1}{2W_n} \frac{d^2 W_n}{dz^2} \right] + \frac{f_n}{a^2} \left(\varepsilon_n - \frac{W_n^2}{b_n} \right) = 0 \quad (4.12)$$

Здесь ε_n – безразмерный параметр,

$$\varepsilon_n = \frac{E}{U_0} - 1 + \frac{1}{b_n}, \quad (4.13)$$

a – квантовый масштаб длины,

$$a = \frac{\hbar}{\sqrt{2mU_0}}. \quad (4.14)$$

Дальнейшие преобразования удобнее выполнять для барьера U_1 и для каждой ямы U_2 и U_3 в отдельности.

В области барьера ($W = W_1$) подстановка распределения (4.3) в (4.10) приводит при $n = 1$ к явному выражению для новой переменной η_1 :

$$\eta_1 = \frac{L_1}{\sqrt{1+M_1^2}} \ln \left[\frac{1 + (m_1)_+ \operatorname{tg}(z/2L_1)}{1 - (m_1)_- \operatorname{tg}(z/2L_1)} \right], \quad (4.15)$$

$$(m_n)_\pm = \sqrt{1+M_n^2} \pm M_n. \quad (4.16)$$

Следует отметить полезное свойство величин $(m_n)_\pm$:

$$(m_n)_+ \cdot (m_n)_- = 1. \quad (4.17)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что распределение потенциала W_1 в области барьера ($0 \leq z \leq z_1$) может быть выражено через переменную η_1 (4.15):

$$W_1 = \left[\cos\left(\frac{z}{L_1}\right) + M_1 \sin\left(\frac{z}{L_1}\right) \right]^{-1} = \frac{\operatorname{ch} \left[\frac{\eta_1}{L_1} \sqrt{1+M_1^2} - \operatorname{Arcsh} M_1 \right]}{\sqrt{1+M_1^2}}. \quad (4.18)$$

Переходя в уравнении (4.12) к дифференцированию по переменной η_1 с помощью (4.10) и вводя нормированную координату x_n

$$x_n = \frac{\eta_n}{L_n} \sqrt{1+M_n^2}, \quad (4.19)$$

можно переписать уравнение (4.12) для функции f_1 в простой безразмерной форме:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} + f_1 \left(q_1^2 + \frac{T_1}{\operatorname{ch}^2 \varphi_1} \right) = 0, \quad \varphi_1 = x_1 - \operatorname{Arcsh} M_1. \quad (4.20)$$

Коэффициенты уравнения (4.20) определяются через параметры профиля W_1 :

$$q_1^2 = \frac{L_1^2}{a^2(1+M_1^2)} \frac{1}{|b_1|} - \frac{1}{4}, \quad T_1 = \frac{L_1^2}{a^2} \left(\frac{E}{U_0} - 1 - \frac{1}{|b_1|} \right) - \frac{1}{4} \quad (4.21)$$

Уравнения для функций f_2 и f_3 , соответствующих потенциальным ямам U_2 и U_3 , выводятся по такой же схеме и представляются в виде, аналогичном (4.20):

$$\frac{\partial^2 f_{2,3}}{\partial x_{2,3}^2} + f_{2,3} \left(q_{2,3}^2 + \frac{T_{2,3}}{ch^2 \varphi_{2,3}} \right) = 0, \quad \varphi_{2,3} = x_{2,3} - \text{Arcsh } M_{2,3} \quad (4.22)$$

$$q_{2,3}^2 = - \left(\frac{L_{2,3}^2}{a^2(1+M_{2,3}^2)} \frac{1}{b_{2,3}} + \frac{1}{4} \right), \quad (4.23)$$

$$T_{2,3} = \frac{L_{2,3}^2}{a^2} \left(\frac{E}{U_0} - 1 + \frac{1}{b_{2,3}} \right) - \frac{1}{4}. \quad (4.24)$$

Таким образом, уравнения для волновой функции в областях барьера и ям представлены в одинаковой форме. Такая структура упрощает построение решений уравнений (4.20), (4.22) и их анализ.

3. Чтобы построить решения уравнений (4.20) и (4.22), введем новую переменную ε и новую функцию Θ_n по формулам [68]

$$\varepsilon = th \varphi_n, \quad f = (1 - \varepsilon^2)^{p_n} \Theta_n. \quad (4.25)$$

Такая замена преобразует уравнения (4.20) и (4.22) к виду:

$$(1 - \varepsilon^2) \frac{d^2 \Theta_n}{d\varepsilon^2} - 2\varepsilon_n (1 + 2p_n) \frac{d\Theta_n}{d\varepsilon} - (2p_n + 4p_n^2 - T_n) \Theta_n = 0, \quad (4.26)$$

$$2p_n = \sqrt{-q_n^2} \quad (4.27)$$

Параметр q_n^2 определен формулами (4.21) и (4.23). Как видно из (4.23), значения q_2^2 и q_3^2 всегда отрицательны, то есть величины p_2 и p_3 всегда действительные. В отличие от этого, параметр q_1^2 (4.21) может принимать как положительные, так и отрицательные значения, соответственно, величина p_1 (4.27) может быть как мнимой, так и действительной.

Введя новую переменную u

$$u = \frac{1 - \varepsilon}{2}, \quad (4.28)$$

преобразуем уравнение (4.26) к виду:

$$u(1-u) \frac{d^2 \Theta}{du^2} + [\gamma_n - u(1 + \alpha_n + \beta_n)] \frac{d\Theta}{du} - \alpha_n \beta_n \Theta_n = 0. \quad (4.29)$$

Постоянные α_n , β_n и γ_n в уравнении (4.29) задаются выражениями:

$$\alpha_n, \beta_n = \frac{1}{2} \left(1 + 4p_n \pm \sqrt{1 + 4T_n} \right), \quad \gamma_n = 1 + 2p_n. \quad (4.30)$$

Полученное гипергеометрическое дифференциальное уравнение (4.29) имеет, как известно, два линейно независимых решения. Поскольку между параметрами α_n , β_n и γ_n (4.30) существует соотношение

$$\gamma_n = \frac{1}{2} (\alpha_n + \beta_n + 1), \quad (4.31)$$

эти решения можно представить через гипергеометрические функции G_n и Q_n [69]

$$G_n = G_n(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n; u), \quad Q_n = Q_n(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n; u) \quad (4.32)$$

Такое представление возможно, если величины α_n , β_n и γ_n отличны как от нуля, так и от целых отрицательных чисел. Предполагая в дальнейшем эти условия выполненными, можно найти общее решение уравнения (4.29):

$$\Theta_n = A_n G_n + B_n Q_n \quad (4.33)$$

Подстановка решения (4.33) в уравнения (4.29) и (4.12) позволяет записать решение уравнения Шредингера (4.1) в явном виде:

$$\Psi_n = \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{z}{L_n}\right) + M_n \sin\left(\frac{z}{L_n}\right)}}{(ch \varphi_n)^{2p_n}} (A_n G_n + B_n Q_n) \quad (4.34)$$

Коэффициенты A_n и B_n в (4.34) определяются из условий непрерывности логарифмической производной волновой функции Ψ_n на границе каждого

участка. Неизвестные значения энергии E , входящие в параметры этих функций α_n и β_n через величину T_n , будут определены в следующем разделе с помощью граничных условий.

4.3 Уровни энергии частицы в «расщепленной» потенциальной яме

Граничные условия для функций Ψ_n (4.34) должны ставиться на границах $z = z_2$ и $z = z_3$ и в точках касания выпуклой и вогнутых частей графика профиля $U(z)$, то есть в точках, где $W_1 = 1$ ($z = 0$ и $z = z_1$). Для анализа граничных условий нужно знать значения функций Ψ_n и производных $\frac{d\Psi_n}{dz}$ в этих точках. Производная от функции $\Psi_n(z)$ составляет:

$$\frac{d\Psi_n}{dz} = \frac{1}{(ch \varphi_n)^{2p_n}} \left\{ \left[\frac{\sqrt{W_n(z)}}{2L_n} \left(-\sin\left(\frac{z}{L_n}\right) + M_n \cos\left(\frac{z}{L_n}\right) \right) - \frac{2p_n}{\sqrt{W_n(z)}} th(\varphi_n) \frac{d\varphi_n}{dz} \right] \times \right. \\ \left. \times [A_n G_n + B_n Q_n] + \frac{1}{\sqrt{W_n(z)}} \left(A_n \frac{dG_n}{dz} + B_n \frac{dQ_n}{dz} \right) \right\} \quad (4.35)$$

Вычисление функций Ψ_n (4.34) и их производных (4.35) в точках касания 0 и z_1 упрощается равенствами, выполненными в этих точках:

$$W_n = 1, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = \frac{\sqrt{1 + M_n^2}}{L_n} \quad (4.36)$$

В дальнейшем для упрощения записи удобно представить решения G_n и Q_n (4.32) с помощью гипергеометрических рядов $F[(u_n)_+]$ и $F[(u_n)_-]$, где, согласно (4.28),

$$(u_n)_\pm = \frac{1 \pm th \varphi_n}{2}, \quad (4.37)$$

при этом запись в виде $F[(u_n)_\pm]$ и $\frac{\partial F[(u_n)_\pm]}{\partial u} = F'[(u_n)_\pm]$ означает, что параметры гипергеометрической функции α_n , β_n и γ_n , соответствующие индексу n , берутся из (4.30).

Для дальнейших вычислений требуются значения величин φ_n и $(u_n)_\pm$ на границах каждого участка профиля потенциала $U(z)$. Эти величины определяются ниже для каждого участка.

а. Барьер ($0 \leq z \leq z_1$).

В точке $z = 0$ величина η_1 (4.10) равна нулю, соответственно, из (4.19) и (4.20) получим:

$$\varphi_1 = -\text{Arcsh } M_1, \quad \text{th } \varphi_1 = -\frac{M_1}{\sqrt{1+M_1^2}}, \quad \text{ch } \varphi_1 = \sqrt{1+M_1^2}, \quad (4.38)$$

$$(u_1)_\pm = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{M_1}{\sqrt{1+M_1^2}} \right), \quad (4.39)$$

$$G_1 = F[(u_1)_+], \quad Q_1 = F[(u_1)_-].$$

Пользуясь выражением для производной (4.35) и равенствами (4.36), можно записать логарифмическую производную функции Ψ_1 в точке $z = 0$ в виде:

$$\left. \frac{1}{\Psi_1} \frac{d\Psi_1}{dz} \right|_{z=0} = \frac{1}{2L_1} \left\{ M_1(1+4p_1) - \frac{1}{\sqrt{1+M_1^2}} \left[\frac{KF'[(u_1)_+] - F'[(u_1)_-]}{KF[(u_1)_+] + F[(u_1)_-]} \right] \right\} \quad (4.40)$$

$$K = \frac{A_1}{B_1}. \quad (4.41)$$

В точке $z = z_1$ из условия $W(z_1) = 1$ можно найти значения

$$\sin\left(\frac{z_1}{L_1}\right) = \frac{2M_1}{1+M_1^2}, \quad \cos\left(\frac{z_1}{L_1}\right) = \frac{1-M_1^2}{1+M_1^2}. \quad (4.42)$$

Пользуясь представлением (4.18), получим для точки z_1 , в отличие от (4.38):

$$\varphi_1 = \text{Arcsh } M_1, \quad \text{th } \varphi_1 = \frac{M_1}{\sqrt{1+M_1^2}}, \quad (4.43)$$

$$G_1 = F[(u_1)_-], \quad Q_1 = F[(u_1)_+].$$

Подставляя эти значения в общую формулу (4.35), вычислим логарифмическую производную функции Ψ_1 в точке z_1 :

$$\left. \frac{1}{\Psi_1} \frac{d\Psi_1}{dz} \right|_{z=z_1} = -\frac{1}{2L_1} \left\{ M_1(1+4p_1) + \frac{1}{\sqrt{1+M_1^2}} \left[\frac{KF'[(u_1)_-] - F'[(u_1)_+]}{KF[(u_1)_-] + F[(u_1)_+]} \right] \right\}. \quad (4.44)$$

Значения $(u_1)_\pm$ определены в (4.39), величина K – в (4.41).

б. Потенциальная яма U_2 ($z_1 \leq z \leq z_2$). Для стандартизации расчета удобно ввести переменную $\Delta(z) = z - z_1$, так что $\Delta(z_1) = 0$, $\Delta(z_2) = \Delta_2$. Найти значения $(u_2)_\pm$ в точке Δ_2 можно получить, используя (4.6) и (4.13):

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\Delta_2}{2L_2}\right) = (m_2)_+ = \sqrt{1 + M_2^2} + M_2. \quad (4.45)$$

Подстановка (4.45) в определение η_2 , полученное из (4.12), дает

$$\eta_2(z_2) \rightarrow \infty, \quad \operatorname{th} \varphi_2|_{z=z_2} = 1, \quad (4.46)$$

$$(u_2)_+|_{z=z_2} = 1, \quad (u_2)_-|_{z=z_2} = 0. \quad (4.47)$$

При вычислении значений гипергеометрических рядов G_2 и Q_2 в точке z_2 следует иметь в виду, что в этой области величина q_2 (4.23) является мнимой, а поэтому величина $\gamma_2 = 1 + 2p_n = 1 + \sqrt{-q_2^2}$ - комплексная. С другой стороны, из теории гипергеометрических рядов известно, что в случае

$$\operatorname{Re}(\alpha_{2,3} + \beta_{2,3} - \gamma_{2,3}) = \operatorname{Re}(\sqrt{-q_{2,3}^2}) = 0 \quad (4.48)$$

этот ряд расходится во всем единичном круге [69]. Поэтому в общем решении (4.34) следует исключить расходящийся ряд, соответствующий значению $(u_2)_+$, положив в (4.34) коэффициент $B_2 = 0$, так что функция Ψ_2 примет вид

$$\Psi_2 = \frac{A_2 \sqrt{\cos\left(\frac{\Delta}{L_2}\right) + M_2 \sin\left(\frac{\Delta}{L_2}\right)}}{(\operatorname{ch} \varphi_2)^{2p_2}} G(u). \quad (4.49)$$

Гипергеометрический ряд $G(u)$ в точке $z = z_2$ сводится, согласно (4.47), к величине $G(0) = 1$; так как выражение под корнем в (4.49) равно нулю, то $\Psi_2|_{z=z_2} = 0$.

Для вычисления логарифмической производной в функции Ψ_2 в точке z_1 ($\Delta = 0$) заметим, что

$$\varphi_2 = -\operatorname{Arcsh} M_2, \quad \operatorname{th} \varphi_2 = -\frac{M_2}{\sqrt{1 + M_2^2}}, \quad (4.50)$$

$$u_2 = \frac{1 - th \varphi_2}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{M_2}{\sqrt{1 + M_2^2}} \right) = (u_2)_+ \quad (4.51)$$

Пользуясь общей формулой (4.35), найдем логарифмическую производную функции Ψ_2 в точке z_1 :

$$\frac{1}{\Psi_2} \frac{d\Psi_2}{dz} \Big|_{z=z_1} = \frac{1}{2L_2} \left\{ M_2(1 + 4p_2) - \frac{1}{\sqrt{1 + M_2^2}} \frac{F'[(u_2)_+]}{F[(u_2)_+]} \right\} \quad (4.52)$$

в. Анализ функции Ψ_3 и ее производной в области левой потенциальной ямы U_3 (рис. 4.1) производится по той же схеме, что была использована выше для потенциала U_2 . Так, для точки z_3 получим:

$$tg \left(\frac{z_3}{2L_3} \right) = (m_3)_- = \sqrt{1 + M_3^2} - M_3 \quad (4.53)$$

$$\eta_3(z_3) \rightarrow -\infty, \quad th \varphi_3 |_{z=z_3} = -1, \quad (4.54)$$

$$(u_3)_+ |_{z=z_3} = 0, \quad (u_3)_- |_{z=z_3} = 1. \quad (4.55)$$

Исключая теперь в общем решении (4.34) расходящийся ряд $Q[(u_3)_-]$, то есть положив $A_3 = 0$, получим функцию Ψ_3 :

$$\Psi_3 = \frac{B_3 \sqrt{\cos \left(\frac{z}{L_3} \right) + M_3 \sin \left(\frac{z}{L_3} \right)}}{(ch \varphi_3)^{2p_3}} Q(u). \quad (4.56)$$

При этом функция Ψ_3 на левой стенке ямы ($z = z_3$) обращается в нуль:

$$\Psi_3 |_{z=z_3} = 0.$$

Учитывая, что в левой яме $z \leq 0$ и, согласно (4.12), значения $\eta_3 < 0$, выберем представление для функции W_3 , в отличие от (4.18), в виде

$$W_3 = \frac{ch \left(\frac{\eta_3 \sqrt{1 + M_3^2}}{L_3} + \text{Arcsh } M_3 \right)}{\sqrt{1 + M_3^2}}. \quad (4.57)$$

При этом в точке $z = 0$

$$\varphi_3 = \text{Arcsh } M_3, \quad \text{th } \varphi_3 = \frac{M_3}{\sqrt{1+M_3^2}}, \quad (4.58)$$

$$u_3 = \frac{1 + \text{th } \varphi_3}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{M_3}{\sqrt{1+M_3^2}} \right) = (u_3)_+$$

Пользуясь равенствами (4.58), найдем логарифмическую производную функции Ψ_3 в точке $z = 0$:

$$\frac{1}{\Psi_3} \frac{d\Psi_3}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2L_3} \left\{ -M_3(1+4p_3) + \frac{1}{\sqrt{1+M_3^2}} \frac{F'[(u_3)_+]}{F[(u_3)_+]} \right\} \quad (4.59)$$

Итак, мы нашли логарифмические производные функций Ψ_1 , Ψ_2 и Ψ_3 слева и справа от точек $z = 0$ и $z = z_1$. Условие непрерывности этих производных от функций Ψ_1 и Ψ_2 в точке $z = z_1$ записывается с учетом (4.44) и (4.52) как:

$$\begin{aligned} & \frac{L_1}{L_2} \left\{ M_2(1+4p_2) - \frac{1}{\sqrt{1+M_2^2}} \frac{F'[(u_2)_+]}{F[(u_2)_+]} \right\} = \\ & = -M_1(1+4p_1) - \frac{1}{\sqrt{1+M_1^2}} \left[\frac{KF'[(u_1)_-] - F'[(u_1)_+]}{KF[(u_1)_-] + F[(u_1)_+]} \right] \end{aligned} \quad (4.60)$$

Аналогично условие непрерывности логарифмических производных в точке $z = 0$ от функций Ψ_1 (4.40) и Ψ_3 (4.59) имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{L_1}{L_3} \left\{ -M_3(1+4p_3) + \frac{1}{\sqrt{1+M_3^2}} \frac{F'[(u_3)_+]}{F[(u_3)_+]} \right\} = \\ & = M_1(1+4p_1) - \frac{1}{\sqrt{1+M_1^2}} \left[\frac{KF'[(u_1)_+] - F'[(u_1)_-]}{KF[(u_1)_+] + F[(u_1)_-]} \right] \end{aligned} \quad (4.61)$$

Параметр K в уравнениях (4.60) и (4.61) определен в (4.41). Выполняя, согласно (4.27), замену $4p_{2,3} = 2\sqrt{-q_{2,3}^2}$, $4p_1 = 2iq_1$, можно выразить параметр K из (4.60):

$$K = \frac{F'[(u_1)_+] - S_2 F[(u_1)_+]}{F'[(u_1)_-] + S_2 F[(u_1)_-]} \quad (4.62)$$

$$S_2 = \sqrt{1 + M_1^2} \left\{ \frac{L_1}{L_2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + M_2^2}} \frac{F'[(u_2)_+]}{F[(u_2)_+]} - M_2 (1 + 2\sqrt{-q_2^2}) \right] - M_1 (1 + 2iq_1) \right\}. \quad (4.63)$$

Аналогично выразим K из (4.61):

$$K = \frac{F'[(u_1)_-] + S_3 F[(u_1)_-]}{F'[(u_1)_+] - S_3 F[(u_1)_+]} \quad (4.64)$$

$$S_3 = \sqrt{1 + M_1^2} \left\{ M_1 (1 + 2iq_1) - \frac{L_1}{L_3} \left[-M_3 (1 + 2\sqrt{-q_3^2}) + \frac{1}{\sqrt{1 + M_3^2}} \frac{F'[(u_3)_+]}{F[(u_3)_+]} \right] \right\} \quad (4.65)$$

Приравнивая значения K из (4.62) и (4.64), получим дисперсионное уравнение:

$$\frac{F'[(u_1)_+] - S_2 F[(u_1)_+]}{F'[(u_1)_-] + S_2 F[(u_1)_-]} = \frac{F'[(u_1)_-] + S_3 F[(u_1)_-]}{F'[(u_1)_+] - S_3 F[(u_1)_+]} \quad (4.66)$$

Уравнение (4.66) представляет собой основной результат этой главы. Это уравнение определяет дискретные значения энергии E , входящие в параметры α_n и β_n гипергеометрических рядов. При решении уравнения (4.66) производные гипергеометрического ряда F удобно вычислять по известной формуле [74]:

$$\frac{\partial F(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n; u)}{\partial u} = \frac{\alpha_n, \beta_n}{\gamma_n} F(\alpha_n + 1, \beta_n + 1, \gamma_n + 1; u) \quad (4.67)$$

Уравнение (4.66) решалось численно для следующих параметров профиля $U(z)$: $M_1 = 0.72$, $b_1 = -1.37$, $L_1 = 4$ нм, $M_2 = 0.92$, $b_2 = 1.41$, $L_2 = 5$ нм, $M_3 = 3.23$, $b_3 = 1.23$, $L_3 = 20$ нм, $U_0 = 0.25$ эВ; эти параметры удовлетворяют условиям касания (4.9). Собственные значения энергии E_m , соответствующие m -му корню уравнения (4.66), представлены в таблице 4.1 для трех случаев: первый столбец – асимметричный профиль, ямы U_2 и U_3 имеют разную глубину, второй столбец – симметричный профиль, обе ямы имеют глубину $(U_2)_{\min}$ (4.7), третий столбец – тоже симметричный профиль, но, в отличие от второго столбца, обе ямы имеют глубину $(U_3)_{\min}$.

Таблица 4.1.

Значения уровней энергии E в «расщепленной» потенциальной яме

m	1	2	3
1	1.254	1.309	1.249
2	1.287	1.370	1.269
3	1.316	1.441	1.282
4	1.344	1.518	1.306
5	1.377	1.602	1.342
6	1.410	1.688	1.361
7	1.441	1.778	1.372
8	1.478	1.879	1.407
9	1.509	1.963	1.422
10	1.543	2.080	1.451
11	1.581	2.192	1.463
12	1.620	2.297	1.496
13	1.639	2.420	1.508
14	1.698	2.538	1.540
15	1.737	2.673	1.557
16	1.763	2.797	1.583
17	1.815	2.913	1.602
18	1.858	3.075	1.628
19	1.898	3.207	1.653
20	1.939	3.354	1.677

4.4 Основные результаты главы 4

В заключение отметим основные результаты, полученные в этой главе:

- Найдены точные аналитические решения уравнения Шредингера для модели «расщепленного» потенциала, содержащего две потенциальные ямы, разделенные потенциальным барьером, при этом высота барьера и глубины ям произвольны.
- Построена модель «расщепленного» потенциала, содержащая семь свободных параметров, с помощью которой рассчитаны положения энергетических уровней.

Заключение

Основные результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть сформулированы следующим образом.

- Определены основные механизмы рассеяния носителей, от которых зависят нелинейнооптические свойства полупроводников АПВВ в миллиметровом и субмиллиметровом диапазоне.
- Рассчитаны зависимости нелинейных восприимчивостей третьего порядка указанных полупроводников от температуры кристалла, длины волны внешнего электромагнитного поля и концентрации ионизированных примесей. Обнаружено, что их максимальные значения на два порядка превышают величины нелинейных восприимчивостей в видимом и ближнем ИК диапазонах.
- Получена временная зависимость поля отраженного и проходящего импульса для исходных импульсов различной длительности при помощи неразделяющихся решений уравнений Максвелла в плазмоподобной среде. Установлено, что для коротких несинусоидальных импульсов, обратная продолжительность которых сравнима с плазменной частотой среды, искажение формы импульса увеличивается с уменьшением длительности импульса.
- Получено аналитическое решение задачи об отражении произвольно поляризованного электромагнитного излучения от неоднородного покрытия с координатной зависимостью диэлектрической проницаемости вида $U(z) = \left(\cos \frac{z}{L} + M \sin \frac{z}{L} \right)^{-1}$, содержащей два свободных параметра M и L , с помощью которой может быть описан ряд как монотонных, так и немонотонных профилей диэлектрической проницаемости.
- Рассчитаны комплексные коэффициенты отражения для некоторых профилей такого вида. Показано, что определенные профили

позволяют реализовать малые значения коэффициентов отражения для электромагнитных волн в широком диапазоне углов падения и частот.

- Получено точное решение уравнения Шредингера для модели «расщепленного» потенциала, содержащей семь свободных параметров, и рассчитаны положения энергетических уровней частицы в таком потенциале.

Материалы диссертации опубликованы в изданиях [53, 54, 58, 62, 70] и доложены на конференциях [53, 54, 75].

В заключение хочу выразить искреннюю благодарность А. В. Шепелеву и А. Б. Шварцбургу за постоянную помощь в подготовке диссертационной работы.

Список литературы

1. Бломберген Н. Нелинейная оптика. – М.: Мир, 1966 – 566 с.
2. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. – М.: ВИНТИ, 1964. – 296 с.
3. Шен И. Р. Принципы нелинейной оптики. – М.: Наука, 1989. – 560 с.
4. Цернике Ф., Мидвинтер Дж. Прикладная нелинейная оптика. – М.: Мир, 1976. – 264 с.
5. Mayer A., Keilmann F. Far-infrared nonlinear optics. II. $\chi^{(3)}$ contributions from the dynamics of free carriers in semiconductors // Phys. Rev. – 1986. – Vol. B33. – P. 6962-6968.
6. Barmantlo M., Hoofst G. W., Eliel E. R., van der Ham E. W. M., Vreken Q. H. F., van der Meer A. F. G., van Amersfoort P. W. Sum-frequency generation with a free-electron laser: a study of gallium phosphide // Phys. Rev. – 1994. – Vol. A50. – P. R14-R17.
7. Антонюк А. Д., Дьяченко А. Г., Екжанов Р. И., Карлов Н. В., Сисакян И. Н., Шепелев А. В., Шварцбург А. Б. Управление излучением миллиметрового и субмиллиметрового диапазона при его взаимодействии с полупроводниковой плазмой // Доклады АН СССР. – 1989. – Т. 309. – С. 92-97.
8. Андрюшин Е. А., Екжанов Р. И., Сисакян И. Н., Шепелев А. В., Шварцбург А. Б. Использование разогрева полупроводниковой плазмы электрическим полем для управления излучением миллиметрового и субмиллиметрового диапазона // Компьютерная оптика. – 1989. № 6. – С. 51-54.
9. Сисакян И. Н., Шепелев А. В., Шварцбург А. Б. Адаптивное управление миллиметровым и субмиллиметровым излучением // Компьютерная оптика. – 1989. № 5. – С. 62-66.

10. Сисакян И. Н., Шепелев А. В., Шварцбург А. Б. Способ амплитудной модуляции электромагнитного излучения. – Авторское свидетельство № 1671088 (1991).
11. Ekzhanov R. I., Shepelev A. V. Nonlinear susceptibilities of semiconductors in millimeter range // SPIE Proc. – 1998. – Vol. 3158. – P. 220-223.
12. Kohler R., Tredicucci A., Beltram F., Beere H. E., Linfield E. H., Davies A. G., Ritchie D. A., Iotti R. C., Rossi F. THz semiconductor-heterostructure laser // Nature (London). – 2002. – Vol. 417. – P. 156-159.
13. Keilmann F. Nonlinear far-infrared spectroscopy of solids // Infrared Phys. – 1991. – Vol. 31. No 4. – P. 373-380.
14. Dekorsy T., Yakovlev V. A., Seidel W., Helm M., Keilmann F. Infrared-phonon-polariton resonance of the nonlinear susceptibility in GaAs. // Phys. Rev. Lett. – 2003. – Vol. 90. No 5. – P. 055508-1 – 055508-4.
15. Шварцбург А. Б. Видеоимпульсы и непериодические волны в диспергирующих средах (точно решаемые модели) // УФН. – 1998. – Т. 168. № 1. – С. 85-96.
16. Бахрах Л. Д., Блискавицкий А. А. Оптомикроволновые методы формирования излучения сверхширокополосных антенн // УФН. – 1993. – Т. 162. № 2. – С. 160-164.
17. Pastol Y. et al. Coherent broadband microwave spectroscopy using picosecond optoelectronic antennas // Appl. Phys. Lett. – 1989. – Vol. 54. No 4. – P. 307-309.
18. Fattinger C., Grischkovsky D. Terahertz beams // Appl. Phys. Lett. – 1989. – Vol. 54. No 6. – P. 490-492.
19. Stingl A. et al. Generation of 11-fs pulses from a Ti:sapphire laser without the use of prisms // Opt. Lett. – 1994. – Vol. 19. No 4. – P. 204-206.
20. Sun E., Rusch W. Time-domain physical-optics // IEEE Trans. Ant. Propag. – 1994. – Vol. 42. No. 1. – P. 9-15.
21. Shvartsburg. A. B. Time-domain optics of ultrashort waveforms. – Oxford: Clarendon, 1996. – 204 p.

22. Тихонравов А. В. Синтез слоистых сред с заданными амплитудно-фазовыми свойствами // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. – 1985. – Т. 25. № 11. – С. 1647-1688.
23. Furman Sh., Tikhonravov A. V. Basics of optics of multilayer systems. – Gif sur Yvette: Editions Frontiers, 1992. – 242 p.
24. Tikhonravov A. V. Some theoretical aspects of thin film optics and their applications // Applied Optics. – 1993. – Vol. 32. No 28. – P. 5417-5426.
25. Свешников А. Г., Тихонравов А. В., Трубецков М. К. Нелокальный метод оптимизации многослойных оптических систем // Математическое моделирование. – 1995. № 7. – С. 105-127.
26. Воронов А. В., Тихонравов А. В., Трубецков М. К. Приближенный метод определения спектральных коэффициентов многослойных покрытий со слабо неоднородными слоями // Вестник МГУ, сер. 3, Физика, астрономия. – 1999. № 3. – С. 39-41.
27. Lekner J. Exact reflection amplitudes for the Rayleigh profile // Physica A. – 1982. – Vol. 116. – P. 235-247.
28. Wait J. R. Electromagnetic waves in stratified media. – Oxford: IEEE Press, 1970. – 392 p.
29. Casperson L. W. Beam modes in complex lenslike media and resonators // JOSA. – 1975. – Vol. 65. – P. 399-404.
30. Jackson J. Classical electrodynamics, 2nd edition. – New York: Wiley, 1975. – 808 p.
31. Brown F., Horman S. R., Palevsky A., Button K. J. Characteristics of a 30-kW-peak, 496 μm , methyl fluoride laser // Opt. Commun. – 1973. – Vol. 9. – P. 28-30.
32. Boyd G. D., Bridges T. J., Pollack M. A., Turner E. H. Microwave nonlinear susceptibilities due to electronic and ionic anharmonicities in acentric crystals // Phys. Rev. Lett. – 1971. – Vol. 173. No 26. – P. 387-392.

33. Ringot J., Lecoq Y., Garreau J. C., Szriftgiser P. Generation of phase-coherent laser beams for Raman spectroscopy and cooling by direct current modulation of a diode laser // *Eur. Phys. J. D.* – 1999. – Vol. 7. – P. 285-288.
34. Bakker Y. J., Cho G. C., Kurtz H. et al. Distortion of terahertz pulses in electro-optic sampling // *J. Opt. Soc. Amer.* – 1988. – Vol. 15. No 6. – P. 1795-1800.
35. Grischkovsky D., Keiding S., van Exter M., Fattinger Ch. Far-infrared time-domain spectroscopy with terahertz beams of dielectrics and semiconductors // *J. Opt. Soc Amer.* – 1990. – Vol. 7. No 10. – P. 2006-2011.
36. Dekorsy T., Auer H., Waschke C. et al. THz-wave emission by coherent optical phonons // *Physica B.* – 1996. – Vol. 219&220 – P. 775-782.
37. Покатилов Е. И., Фомин В. М., Климин С. Н. Кинетические и оптические свойства полупроводников в сильных полях. – Кишинев: Молдавский госуниверситет, 1986. – 86 с.
38. Андрюшин Е. А., Екжанов Р. И., Сисакян И. Н., Шварцбург А. Б., Шепелев А. В. Отражение излучения дальнего ИК диапазона от горячей плазмы полупроводников // *Квантовая электроника.* – 1990. – Т. 17. № 2. – С. 247-250.
39. Glotova M. Yu., Shvartsburg A. B., Shepelev A. V. Harmonic generation in the reflection of microwave radiation on the semiconductor surface // *SPIE Proc.* – 1996. – Vol. 2843. – P. 134-136.
40. Winnerl S., Regl H.-J., Blomeier T. et al. Interaction of millimeter and submillimeter wave fields with miniband electrons in semiconductor superlattice // *Phys. Stat. Sol.* – 1997. – Vol. B204. No 1. – P. 58-60.
41. Уханов Ю. И. Оптические свойства полупроводников. – М.:Наука, 1977. – 366 с.
42. Mayer A., Keilmann F. Far-infrared nonlinear optics. I. $\chi^{(2)}$ near ionic resonance // *Phys. Rev.* – 1986. – Vol. B33. – P. 6954-6961.
43. Handbook on semiconductors / ed. Moss T.S. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1980. – Vol. 2. – 596 p.

44. Покатилов Е. И., Фомин В.М. Исследование термодинамических и кинетических свойств полупроводников с помощью интегрирования по траекториям. – Кишинев: Молдавский госуниверситет, 1991. – 78 с.
45. Campi D., Coli G. Green's-function approach to the optical nonlinearities in semiconductors and quantum-confined structures // *Phys. Rev. B*. – 1996. – Vol. B54. No 12. – P. R8365-R8368.
46. Аскеров Б.М. Электронные явления переноса в полупроводниках. – М.: Наука, 1985. – 320 с.
47. Зеегер К. Физика полупроводников. – М.:Мир, 1977. – 616 с.
48. Ramsauer C. // *Ann. Phys.* – 1921. – Vol. 64. – P. 513-518
49. Brooks H. *Advances in electronics and electron physics*. Vol. 7. – New York: Academic, 1955. – 488 p.
50. Sze S. M. *Physics of semiconductor devices*. – New York: A Wiley-Interscience Publications, 1981. – 868 p.
51. Бонч-Бруевич В. Л, Калашников С. Г. Физика полупроводников. – М: Наука, 1990. – 672 с.
52. Anderson D. A., Aspely N., The Hall effect in III-V semiconductors assessment // *Semicond. Sci. Technol.* – 1986. – Vol. 1. – P. 187-202.
53. Моисеенко Е. В., Шепелев А. В. Нелинейная восприимчивость полупроводников АШВВ в микроволновом диапазоне // Труды VIII Всероссийской школы-семинара «Физика и применение микроволн». Звенигород, Московская обл., 26-30 мая 2001 г. – Ч. 1. – С. 86-87; Известия АН. Серия физическая. – 2001. – Т. 65. №12. – С. 1793-1795.
54. Moisseenko E. V., Shepelev A. V. Nonlinear susceptibilities of АШВВ semiconductors in far infrared and longwave range // *Proc. of XVII International Conference on Coherent and Nonlinear Optics ICONO-2001. Belarus', Minsk, June 26 - July 1, 2001; SPIE Proc.* – 2002. – Vol. 4748. – P. 313-316.
55. Stillman G. E., Wolfe C. M., Dimmock J. O. Hall coefficient factor for polar mode scattering in n-type GaAs // *J. Phys. Chem. Solids*. – 1977. – Vol. 31. – P. 1199-1204.

56. Dargys A., Kundrotas I. Handbook on physical properties of Ge, Si, GaAs and InP. – Vilnius: Science and Encyclopedia Publishers, 1994. – 46 p.
57. Kalna K., Roy S., Asenov A., Elgaid K., Thayne I. Scaling of pseudomorphic high electron mobility transistors to decanano dimensions // Solid-State Electronics. – 2002. – Vol. 46. – P. 631-638.
58. Моисеенко Е. В., Шепелев А. В. Температурная и частотная зависимость нелинейной восприимчивости GaAs в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2003. – Т. 8. № 5. – С. 41-45.
59. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. – 476 с.
60. Шварцбург А. Б. Импульсная электродинамика негармонических сигналов // УФН. – 1994. – Т. 164. № 3. – С. 333-335.
61. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 542 с.
62. Моисеенко Е. В., Шварцбург А. Б., Шепелев А. В. Временное представление отражения электромагнитных импульсов от плазмоподобной среды // Радиотехника и электроника. – 2003. – Т. 48. № 6. – С. 684-686.
63. Sankur H., Southwell W. H. Broadband gradient-index antireflection coating for ZnSe // Appl. Opt. – 1984. – Vol. 23. – P. 2770-2773.
64. Гинзбург В. Л. Электромагнитные волны в плазме. – М.: Наука, 1967. – 346 с.
65. Jackson J. Classical Electrodynamics. 2nd ed. – New York: Wiley, 1975 – 256 p.
66. Kildemo M., Hinderi O., Drevillon B. A direct robust feedback method for growth control of optical coatings by multiwavelength ellipsometry // JOSA A. – 1997. – Vol. 14. – P. 931 – 936.
67. Shvartsburg A., Petite G., Hecquet P. Broadband antireflection properties of thin heterogeneous dielectric films // JOSA A. – 2000. – Vol. 17. – P. 2267-2272.

68. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. – М.: Наука, 1989. – 768 с.
69. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблица интегралов, сумм рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
70. Моисеенко Е. В., Шварцбург А. Б. Широкополосные безотражательные свойства тонких неоднородных покрытий для произвольно поляризованных электромагнитных волн в широком диапазоне углов падения // Оптика и спектроскопия. – 2003. – Т. 95. № 5. – С. 771-776.
71. Дахновский Ю. Н., Нефедова В. В. Туннелирование в ангармонической жидкости // ЖЭТФ. – 1991. – Т. 100. № 3. – С. 892- 896.
72. Flugge S. Practical quantum mechanics. – Berlin: Springer-Verlag, 1971. – 623 p.
73. Гущин В. Р. О туннелировании электрона в квантовых проволоках // ЖЭТФ. – 1991. – Т. 100. № 3. – С. 924-927.
74. Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа. Т. 2. 2-е изд. – М.: Физматгиз, 1963. – 515 с.
75. Моисеенко Е. В., Шварцбург А. Б., Шепелев А. В. Временное представление взаимодействия коротких электромагнитных импульсов с плазмоподобной средой // Труды VIII Всероссийской школы-семинара «Волновые явления в неоднородных средах» – Красновидово, Московская область, 26-31 мая 2002 г. – Ч. 1. – С. 18-19.
76. Bardeen J., Shockley W. Deformation potentials and mobilities in non-polar crystals // Phys. Rev. – 1950. – Vol. 80. No 1. – P. 72-80.
77. Harrison W. A. Scattering of electrons by lattice vibrations in nonpolar crystals // Phys. Rev. – 1956. – Vol. 104. – P. 1281-1290.